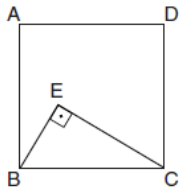


## הסברים

### שאלות ובעיות (שאלות 8-1)



1. עלינו למצוא את שטחו של ריבוע ABCD. לשם כך, עלינו לגלות מה אורך צלעו. בסרטוט מופיע משולש ישר-זווית BEC שאורכי הניצבים שלו הם 3 ס"מ ו-5 ס"מ. לפיכך, אורך היתר שלו BC שווה ל- $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ . שטח הריבוע, השווה לריבוע צלעו, יהיה שווה ל- $\left(\sqrt{34}\right)^2 = 34$ .

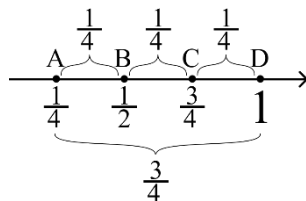
תשובה (2).

2. על ציר המספרים מוקמו ארבע נקודות (A, B, C ו-D) במרחקים זהים. נתונים לנו ערכי הנקודות A ו-D, ומבקשים שנמצא את ערך הנקודה B.

אורכו של הקטע AD שווה למרחק בין הקצוות שלו, כלומר ל- $\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ . הוא מחולק לשלושה

קטעים שווים באורכם (AB, BC ו-CD), ולכן אורך כל קטע יהיה שווה ל- $\frac{1}{4} \left(\frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot 4} = \frac{1}{4}\right)$ .

מכאן שהערך של נקודה B יהיה  $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$ , והערך של נקודה C יהיה שווה ל- $\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ .



תשובה (2).

3. נתון שבחנות יש חבילות בלונים משני סוגים: חבילות קטנות של 10 בלונים במחיר של 7 שקלים לחבילה, וחבילות גדולות של 30 בלונים במחיר של 14 שקלים לחבילה. כמו כן, נתון שאלון קנה בחנות חבילות בלונים במחיר כולל של 28 שקלים. שואלים מה אינו יכול להיות מספר הבלונים הכולל שקנה. נבדוק את התשובות המוצעות באמצעות ניסוי וטעייה, ננסה להגיע למספרי הבלונים בשלוש מתוך ארבע התשובות, ונסמן את התשובה הנותרת.

תשובה (1): 70. נראה שאין אפשרות להגיע למספר כולל של 70 בלונים. נעבור לשאר התשובות ונסה לפסול אותן.

תשובה (2): 60. ניתן לקנות שתי חבילות בלונים גדולות במחיר כולל של  $28 (2 \cdot 14)$  שקלים. מספר הבלונים הכולל בשתי החבילות יהיה שווה ל- $60 (2 \cdot 30)$ . התשובה נפסלת.

תשובה (3): 50. ניתן לקנות שתי חבילות בלונים קטנות וחבילת בלונים גדולה במחיר כולל של  $28 (2 \cdot 7 + 14)$  שקלים. מספר הבלונים הכולל בשלוש החבילות יהיה שווה ל- $50 (2 \cdot 10 + 30)$ . התשובה נפסלת.

תשובה (4): 40. ניתן לקנות ארבע חבילות בלונים קטנות במחיר כולל של  $28 (4 \cdot 7)$  שקלים. מספר הבלונים הכולל בארבעת החבילות יהיה שווה ל- $40 (4 \cdot 10)$ . התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולפיכך התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

**הערה:** חבילה גדולה 'משתלמת' יותר מאשר חבילה קטנה (אם קונים חבילה גדולה מקבלים 30 בלוני במחיר של 14 שקלים, ואם מוציאים את אותו הסכום על חבילות קטנות מקבלים רק 20 בלוני). לכן, כדי להגיע לכמות בלוני מקסימלית נרצה לרכוש רק חבילות גדולות. ב-28 שקלים ניתן לרכוש 2 חבילות גדולות בסך הכול. כיוון שיש בהן יחד 60 בלוני, נקבע כי לא ניתן לרכוש יותר מ-60 בלוני. לפיכך, **תשובה (1)** לפיה נקנו 70 בלוני אפשרית.

**תשובה (1).**

**4.** נתון סרטוט ובו שלושה ישרים הנחתכים בנקודה אחת. על הסרטוט מסומנות שלוש זוויות  $x$ ,  $y$  ו- $z$  (כל זווית נוצרה מחיתוך של שניים משלושת הישרים).

עלינו למצוא את גודלה של זווית  $x$  שבסרטוט, בהינתן שתי משוואות:  $z = x + y$  ו-  $y = 3x$ .

נסמן זוויות קודקודיות על גבי הסרטוט, ונראה כי הזוויות  $x$ ,  $y$  ו- $z$  יוצרות יחד זווית שטוחה שגודלה

$180^\circ$ . לפיכך, ניתן לבנות משוואה לפיה  $x + y + z = 180^\circ$ .

כעת נפתור את מערכת המשוואות שהתקבלה (שתי המשוואות הנתונות

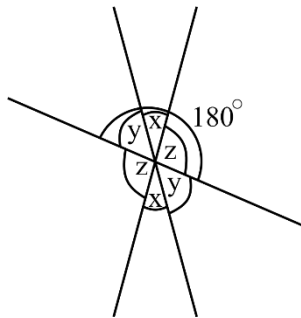
והמשוואה הנוספת שיצרנו.

אם נציב  $y = 3x$  במשוואה  $z = x + y$  נקבל ש-  $z = 4x$  ( $z = x + 3x \Rightarrow$ ).

נציב  $y = 3x$  ו-  $z = 4x$  במשוואה  $x + y + z = 180^\circ$ , ונקבל:

$$\left( x + 3x + 4x = 180^\circ \Rightarrow 8x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{8} \Rightarrow \right) x = 22.5^\circ$$

**תשובה (2).**



**5.** נתון שגילי ערכה בשבוע מסויים 29 שיחות טלפון סך הכול. כמו כן, נתון שביום שני היא ערכה **יותר** שיחות טלפון מכל יום אחר באותו שבוע. עלינו למצוא כמה שיחות טלפון **לכל הפחות** היא ערכה ביום שני.

נבדוק את התשובות המוצעות. מכיוון ששאלו אותנו על מספר השיחות **המינימלי** שערכה ביום שני, נתחיל מהתשובה הקטנה ביותר וממנה נעלה.

**תשובה (4): 4.** אם ביום שני היא ערכה 4 שיחות, אז בכל אחד מששת הימים הנותרים היא עורכת **לכל היותר** 3 שיחות. נקבל שבאותו שבוע היא ערכה **לכל היותר**  $22 (4 + 6 \cdot 3)$  שיחות. לפיכך, לא ייתכן שגילי ערכה באותו שבוע 29 שיחות, והתשובה נפסלת.

**תשובה (1): 5.** אם ביום שני היא ערכה 5 שיחות, אז בכל אחד מששת הימים הנותרים היא עורכת **לכל היותר** 4 שיחות. נקבל שבאותו שבוע היא ערכה **לכל היותר**  $29 (5 + 6 \cdot 4)$  שיחות. לפיכך, ייתכן שגילי ערכה באותו שבוע 29 שיחות, ולכן זו התשובה הנכונה.

אין צורך להמשיך לבדוק גם את שאר התשובות.

**תשובה (1).**

**6.** בתשובות מופיעים ארבעה ביטויים המכילים שורשים, ונתון ששלושה מהם **שווים** זה לזה בערכם. עלינו למצוא את הביטוי **ששונה** בערכו מהאחרים.

נפשט את הביטויים שבתשובות באופן שיאפשר לנו להשוות ביניהם:

**תשובה (1):**  $(\sqrt{12} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{12 \cdot 15}) \sqrt{180}$

**תשובה (2):**  $(2 \cdot \sqrt{45} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{4 \cdot 45}) \sqrt{180}$

**תשובה (3):**  $(3 \cdot \sqrt{30} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{30} = \sqrt{9 \cdot 30}) \sqrt{270}$

הביטויים שבתשובות (1) ו-(2) שווים בערכם, והביטוי בתשובה (3) שונה מהם בערכו. זה מספיק כדי לקבוע כי הוא שונה בערכו מכל האחרים, וזו התשובה הנכונה. למען שלמות ההסבר בלבד נפשט גם את התשובה הנותרת.

$$\text{תשובה (4): } (\sqrt{10} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{10 \cdot 18} = \sqrt{180})$$

**תשובה (3).**

7. נתון ביטוי אלגברי הכולל שני נעלמים, ואנו מתבקשים למצוא באחת התשובות ביטוי שקול לו.

**דרך א':** הצבת דוגמה מספרית

תחילה נציב בביטוי ערכים מספריים נוחים במקום הנעלמים, ונחשב את ערכו המספרי של הביטוי. אם נציב למשל,  $x = 1$  ו-  $y = 1$  נקבל שערכו המספרי של הביטוי שווה ל-120.

$$((8x + 2y) \cdot (16x - 4y)) = (8 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \cdot (16 \cdot 1 - 4 \cdot 1) = 10 \cdot 12 = 120$$

כעת נציב את המספרים שבחרנו גם בתשובות, ונפסול תשובות שערכן המספרי שונה מ-120. אם נצליח לפסול שלוש תשובות, נקבע כי התשובה הנותרת היא בהכרח התשובה הנכונה.

$$\text{תשובה (1): } 14 = 2 \cdot (8 \cdot 1^2 - 1^2) = 2 \cdot (8 - 1) = 2 \cdot 7 = 14. \text{ ערכו של הביטוי שונה מ-120 ולכן}$$

התשובה נפסלת.

$$\text{תשובה (2): } 30 = 2 \cdot (16 \cdot 1^2 - 1^2) = 2 \cdot (16 - 1) = 2 \cdot 15 = 30. \text{ ערכו של הביטוי שונה מ-120 ולכן}$$

התשובה נפסלת.

$$\text{תשובה (3): } 8 = 8 \cdot (2 \cdot 1^2 - 1^2) = 8 \cdot (2 - 1) = 8 \cdot 1 = 8. \text{ ערכו של הביטוי שונה מ-120 ולכן}$$

התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולפיכך התשובה הנותרת בהכרח נכונה. למען שלמות ההסבר נוודא כי ערכה **אינו** שונה מ-120.

$$\text{תשובה (4): } 120 = 8 \cdot (16 \cdot 1^2 - 1^2) = 8 \cdot (16 - 1) = 8 \cdot 15 = 120$$

**דרך ב':** אלגברה

נפשט את הביטוי באופן הבא:

תחילה נוציא גורם משותף מקסימלי מהביטויים  $(8x + 2y)$  ו-  $(16x - 4y)$ , ונקבל:

$$((8x + 2y) \cdot (16x - 4y)) = 2 \cdot (4x + y) \cdot 4 \cdot (4x - y) = 8 \cdot (4x + y)(4x - y)$$

כעת נוזה כי את הביטוי  $(4x + y)(4x - y)$  ניתן לפשט באמצעות נוסחת הכפל המקוצר השלישית.

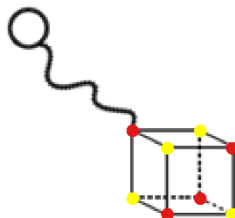
מכיוון שהאיבר הראשון הוא  $4x$  והאיבר השני הוא  $y$ , נפעיל את הנוסחה כך:

$$16x^2 - y^2 = ((4x)^2 - (y)^2)$$

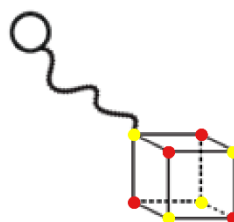
לפיכך, הביטוי שווה ל-  $8 \cdot (16x^2 - y^2)$

**תשובה (4).**

8. לשרית מחזיק מפתחות בצורת קובייה ששרשרת משתלשלת מאחד מקודקדיה. עלינו למצוא בכמה דרכים שונות היא יכולה לצבוע כל אחד מ-8 קודקודי הקובייה באדום או בצהוב, כך שלא יהיו שני קודקודים על אותו מקצוע שצבועים באותו צבע. אם הקודקוד ממנו משתלשלת השרשרת יצבע באדום, אז שאר הקודקודים יהיו צבועים כך:



באותו אופן, אם הקודקוד ממנו משתלשלת השרשרת יצבע בצהוב, אז שאר הקודקודים יהיו צבועים כך:



לפיכך, יש סך הכול שתי דרכים שונות לצבוע את קודקודי הקובייה בהתאם לתנאים של שרית.

**תשובה (2).**

## הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. נשאלנו באיזה מדד היה בשבוע **ב** הפער הגדול ביותר בין האחוזים שנמדדו בחלקה המדושנת לאחוזים שנמדדו בחלקה הלא מדושנת. נתמקד בשבוע **ב**, ונבדוק את הפער בכל אחד מהמדדים
- תשובה (1): משקל ממוצע. בחלקת הלימונים המדושנים – 105%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 100%. הפער – 5%.
- תשובה (2): תכולת סוכר ממוצעת. בחלקת הלימונים המדושנים – 90%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 107.5%. הפער – 17.5%.
- תשובה (3): רמת חומציות ממוצעת. בחלקת הלימונים המדושנים – 110%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 97.5%. הפער – 12.5%.
- תשובה (4): מספר הלימונים. בחלקת הלימונים המדושנים – 100%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 95%. הפער – 5%.
- מצאנו שהפער הגדול ביותר בין האחוזים שנמדדו בחלקה המדושנת לאחוזים שנמדדו בחלקה הלא מדושנת נמדד **בתכולת הסוכר הממוצעת**.
- תשובה (2).**

10. עלינו למצוא באיזה שבוע הייתה רמת החומציות הממוצעת בלימוני **הפרדס כולו** הגבוהה ביותר. נחשב את רמת החומציות הממוצעת (הקווים הגליים) בכל אחד מהימים בתשובות המוצעות:
- תשובה (1): א. בחלקת הלימונים המדושנים – 105%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 99%. הממוצע – 102%.
- תשובה (2): ב. בחלקת הלימונים המדושנים – 110%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 97%. הממוצע – 103.5%.

**תשובה (3): ה.** בחלקת הלימונים המדושנים – 115%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 100%. הממוצע – 107.5%.

**תשובה (4): ד.** בחלקת הלימונים המדושנים – 110%, ובחלקת הלימונים הלא מדושנים – 96%. הממוצע – 98%.

ניתן לראות כי רמת החומציות הממוצעת בלימוני **הפרדס כולו** הגבוהה ביותר נמדדה בשבוע ה'.  
הערה: ניתן היה לזהות בעין שרמת החומציות הממוצעת הגבוהה ביותר בחלקת הלימונים המדושנים נמדדה בשבוע ה', וכי רמת החומציות הממוצעת הגבוהה ביותר בחלקת הלימונים הלא מדושנים נמדדה גם היא בשבוע ה'. לפיכך, ניתן היה להימנע מחישובי הממוצעים ולקבוע כי רמת החומציות הממוצעת בלימוני הפרדס כולו הייתה הגבוהה ביותר בשבוע זה.

**תשובה (3).**

**11.** עלינו למצוא מהו השבוע הראשון שבו הייתה החלקה המדושנת אחראית **ליותר ממחצית** רווחי הפרדס כולו.

בתרשים מסמנים את רווחי מכירת הלימונים המדושנים כאחוז מרווחי מכירת הלימונים הלא מדושנים באמצעות  $\textcircled{S}$ . נחפש מאיזה שבוע לראשונה רווחי מכירת הלימונים המדושנים כאחוז מרווחי מכירת הלימונים הלא מדושנים הוא מעל 100%. כלומר, מאיזה שבוע לראשונה רווחי מכירת הלימונים המדושנים גבוהים מרווחי מכירת הלימונים הלא מדושנים, ולפיכך מהווים מעל למחצית מרווחי הפרדס כולו.

זה קורה לראשונה בשבוע ג' כאשר רווחי החלקה המדושנת מהווים מעל 100 אחוזים מרווחי החלקה הלא מדושנת. בפועל סימן המטבע יושב מתחת לקו 105 האחוזים. אולי כדאי לכתוב כ-104.

**תשובה (3).**

**12.** נתון כי בשבוע אפס נקטף בשתי החלקות אותו מספר לימונים, ובנוסף שבשבוע א' נקטפו בחלקה המדושנת של הפרדס 1,800 לימונים. שואלים אותנו כמה לימונים נקטפו באותו שבוע בחלקה הלא מדושנת.

נסתכל על מדד כמות הלימונים. אנחנו רואים שמספר הלימונים שנקטפו בחלקה המדושנת בסוף שבוע א' מהווה 90% ממספרם בשבוע אפס. לפיכך נקבע כי בחלקה המדושנת בשבוע אפס נקטפו בסך הכול

$$2,000 = \left( 1,800 \cdot \frac{100}{90} = \frac{18,000}{9} \right) \text{ לימונים.}$$

מכיוון שנתון כי בשבוע אפס נקטף בשתי החלקות אותו מספר לימונים, נקבע כי זה היה גם מספר הלימונים שנקטפו בשבוע אפס בחלקה הלא מדושנת.

אם מספר הלימונים שנקטפו בחלקה הלא מדושנת בסוף שבוע א' מהווה 95% ממספרם בשבוע אפס,

$$1,900 = \left( 2,000 \cdot \frac{95}{100} = 20 \cdot 95 \right) \text{ לימונים בחלקה הלא מדושנת.}$$

**תשובה (1).**

## שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. נתון תרגיל אותיות שבו האותיות A ו-B מייצגות ספרות בין 1 ל-9, ומבקשים שנמצא מהו ההפרש בין A ל-B.

$$\begin{array}{r} AB \\ - BA \\ \hline 27 \end{array}$$

**דרך א':** הצבת דוגמה מספרית

כיוון ש-AB גדול מ-BA (ההפרש ביניהם חיובי ושווה ל-27), נקבע כי A (ספרת העשרות של AB) גדול מ-B (ספרת העשרות של BA).

נחפש שני מספרים המקיימים את נתוני השאלה. אם נציב למשל  $A = 5$ , אז כדי שספרת האחדות של תוצאת התרגיל תהיה שווה ל-7, יהיה חייב להיות שווה ל-2.

אם מצאנו שהאותיות A ו-B יכולות להיות שווה בהתאמה ל-5 ו-2 ( $52 - 25 = 27$ ), אז ההפרש ביניהן יכול להיות שווה ל-3 ( $5 - 2 = 3$ ). זה מספיק כדי לפסול שלוש תשובות שערך שונה מ-3, ולסמן את התשובה הנותרת.

**דרך ב':** אלגברה – פירוק עשרוני

נעזר בפירוק עשרוני, ונקבל:  $9 \cdot (A - B) = 27$

$$(AB - BA = 27 \Rightarrow (10A + B) - (10B + A) = 27 \Rightarrow 10A + B - 10B - A = 27 \Rightarrow 9A - 9B = 27 \Rightarrow)$$

נותר לנו לחלק את שני צדי המשוואה שקיבלנו ב-9, ונקבל:  $A - B = 3$

**תשובה (3).**

14. עלינו לפשט את הביטוי המספרי  $\frac{120 \cdot 5!}{(6!)^2}$ .

נזכור כי  $5! = 120$ , ולכן את הביטוי אפשר להציג גם כך:  $\frac{5! \cdot 5!}{(6!)^2}$ .

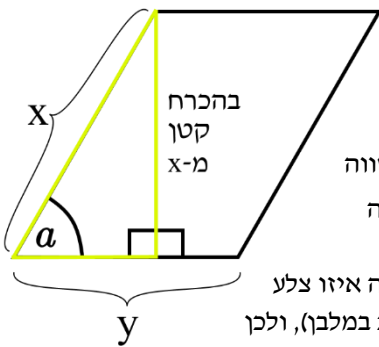
$(6!)^2 = 6! \cdot 6!$ , ולכן נציג את הביטוי כך:  $\frac{5! \cdot 5!}{6! \cdot 6!}$ .

את  $6!$  ניתן להציג גם כ-  $5! \cdot 6$ , ולכן ניתן להציג את הביטוי נציג כך:  $\frac{5! \cdot 5!}{5! \cdot 6 \cdot 5! \cdot 6}$ .

נותר לנו לצמצם את הביטוי ונקבל שהוא שווה ל-  $\left( \frac{5! \cdot 5!}{5! \cdot 6 \cdot 5! \cdot 6} = \frac{1}{6 \cdot 6} \right) \frac{1}{36}$ .

**תשובה (4).**

15. נתונה מקבילית שאורכי צלעותיה  $x$  ו- $y$ . כמו כן, נתון שזווית  $\alpha$  שבסרטוט קטנה מ- $90^\circ$  (כלומר, זווית חדה), ועלינו למצוא בסרטוט קביעה נכונה בהכרח בנוגע לשטח המקבילית המסומן באמצעות  $S$ .



נפתור את השאלה באמצעות **הבנה גאומטרית**. אם זווית  $\alpha$  שבסרטוט הייתה שווה ל- $90^\circ$ , הרי שהיה מדובר במלבן. שטחו, השווה למכפלת אורכי הצלעות שלו, היה שווה ל- $x \cdot y$ .

שטח מקבילית בעלת אותן צלעות יהיה בהכרח קטן יותר משטח המלבן (לא משנה איזו צלע נבחר בתור בסיס המקבילית, גובהה בהכרח יהיה קצר יותר מגובה הצלע הנוספת במלבן), ולכן ניתן לקבוע ששטח המקבילית הנתונה בהכרח קטן מ- $x \cdot y$ .

נבדוק את התשובות המוצעות ונראה כי **תשובה (1)** לפיה  $S < x \cdot y$  היא התשובה הנכונה.

**הערה:** מי שאינו מצליח להבין מדוע הגובה לצלע  $y$  בהכרח קטן מ- $x$  יכול להסתכל על המשולש ישר הזווית שנוצר כשמורידים גובה ל- $y$ . צלע  $x$  היא יתר במשולש, והגובה לצלע  $y$  הוא ניצב במשולש. היתר בהכרח ארוך יותר מהניצב.

**תשובה (1)**

16. נתון שכדי להגיע לעבודה ליאת נוסעת 20 דקות במהירות  $x$  קמ"ש, ו-20 דקות נוספות במהירות  $\frac{x}{2}$  קמ"ש, וכדי לחזור ממנה **באותה דרך**, היא נוסעת במהירות קבועה של  $y$  קמ"ש במשך שעה בדיוק.

מבקשים שנמצא את  $\frac{x}{y}$ . כלומר, את היחס בין המהירויות.

ניעזר ב**נוסחת הדרך** כדי לפתור את השאלה. אנחנו יודעים ש**דרך שווה למכפלת המהירות בזמן**. מכיוון שליאט עוברת את אותה דרך בהלוך ובחזור, נציג את הדרך בהלוך ואת הדרך בחזור באמצעות הנוסחה, ונשווה ביניהן.

מכיוון שהמהירות היא בקמ"ש (קילומטרים לשעה), נמיר את יחידות הזמן הנתונות לשעות.

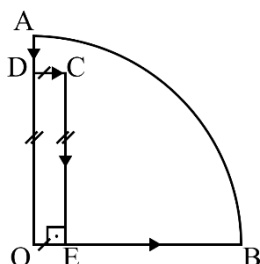
אנחנו יודעים ש-20 דקות הן  $\frac{1}{3}$  שעה, ולכן הדרך בהלוך תהיה שווה ל- $\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y$ , והדרך בחזור תהיה שווה ל- $y(1 \cdot y)$ .

נשווה את הדרכים ונקבל:  $\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y = y$ .

נפשט את המשוואה ונקבל  $\frac{x}{y} = 2$   $\left( \frac{1}{3} \cdot x = y - \frac{1}{3} \cdot y \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot y \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \right)$

**תשובה (2)**

17. נתון סרטוט ובו רבע מעגל שמרכזו בנקודה  $O$ , ובתוכו נקודה כלשהי  $C$ . עלינו למצוא את היחס בין אורך הקשת  $AB$  (מסומן באמצעות  $x$ , ולבין אורך המסלול המודגש (מסומן באמצעות  $y$ ).



המסלול המודגש מורכב מארבעה מקטעים  $(AD, DC, CE, EB)$ . ניתן לראות כי סכום שניים מהמקטעים  $AD$  ו- $CE$  שווים יחד לרדיוס  $AO$ , ושני המקטעים הנוספים  $DC$  ו- $EB$  שווים יחד לרדיוס  $OB$ . לפיכך, המסלול המודגש שווה לסכום שני רדיוסים של המעגל.

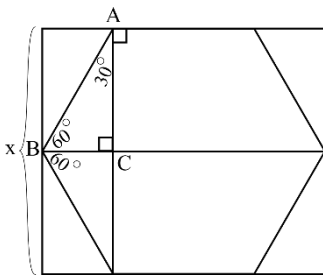
אם נניח שרדיוס המעגל הוא  $r$ , אז אורך הקשת AB תהיה שווה ל-  $\frac{1}{2} \pi \cdot r$ .  $\left( \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \right) \frac{1}{2} \pi \cdot r$

נקבל שהיחס בין אורך הקשת לבין המסלול המודגש (כאמור, שווה לפעמיים אורך הרדיוס) הוא

$$\left( \frac{\frac{1}{2} \pi r}{\frac{1}{2} \pi r} = \right) \frac{1}{4} \pi$$

**תשובה (3).**

**18.** עלינו למצוא את היקפו של משושה **משוכלל** החסום במלבן שאורך צלעו הקצרה  $x$ . לשם כך, עלינו למצוא את צלע המשושה.



נעביר בניית עזר כך שיתקבל משולש ישר-זווית שהיתר שלו הוא אחת מצלעות המשושה המשוכלל (לצרכי נוחות קודקודיו סומנו באותיות A, B ו-C).

מההכרות שלנו עם תכונות הזוויות של המשושה המשוכלל (ידוע כי זוויות הפנימית שלו שווה ל-  $120^\circ$ ), נזהה כי משולש ABC הוא משולש ישר-זווית שזוויותיו הן  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  ו-  $90^\circ$  (ידוע בכינויו משולש זהב).

אנחנו יודעים שמשולש זה מקיים יחס צלעות קבוע  $(1 : \sqrt{3} : 2)$ . נעזר בו כדי למצוא את צלע המשושה.

ניתן לראות שהניצב הגדול במשולש זה (AB הנמצא מול הזווית שגודלה  $60^\circ$ ) שווה ל-  $\frac{1}{2} x$ , ולכן

$$\left( \frac{\frac{1}{2} x}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \right) \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

הניצב הקטן במשולש יהיה שווה ל-  $\frac{x}{2\sqrt{3}}$ , והיתר במשולש (כאמור מהווה גם צלע המשושה

$$\left( \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \right) \frac{x}{\sqrt{3}}$$

המשוכלל) יהיה שווה ל-  $\frac{x}{\sqrt{3}}$ .

$$\left( 6 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \right) \frac{6x}{\sqrt{3}}$$

היקף המשושה המשוכלל יהיה שווה ל-6 פעמים צלעו, כלומר ל-  $\frac{6x}{\sqrt{3}}$ .

**תשובה (4).**

**19.** שואלים אותנו איזה מאי-השוויונות שבתשובות נכון **בהכרח**, בהינתן אי-שוויון לפי  $|a + b| < a$ .

ניתוח מהיר של אי-השוויון הנתון מאפשר לנו לקבוע ש- $a$  הוא בהכרח מספר חיובי, כיוון שהוא גדול מערך **מוחלט** של ביטוי כלשהו  $(a + b)$ . כעת ניגש לפתור את השאלה:

**דרך א':** הצבת דוגמה מספרית

נחפש מספרים המקיימים את אי-השוויון המקורי.

אם נציב מספר חיובי כלשהו במקום  $a$ , למשל  $a = 2$ , נראה כי  $b$  יכול להיות שווה ל-  $(-1)$  או ל-  $(-3)$

, ובשני המקרים יתקבל פסוק אמת.

$$\left( |2 + (-1)| < 2 \Rightarrow |1| < 2 \right) \text{ ו- } \left( |2 + (-3)| < 2 \Rightarrow |-1| < 2 \right)$$

נציב את המספרים בתשובות המוצעות, וננסה לפסול בעזרתם שלוש תשובות:

**תשובה (1):**  $|b| < 2a$ . בין אם נציב  $a = 2$  ו-  $b = -1$  או לחלופין  $a = 2$  ו-  $b = -3$ , נקבל פסוק אמת. לכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

**תשובה (2):**  $2a < |b|$ . אם נציב  $a = 2$  ו-  $b = -1$  נקבל פסוק שקר ( $4 < 1$ ). לכן התשובה נפסלת.

**תשובה (3):**  $|a| < |b|$ . אם נציב  $a = 2$  ו-  $b = -1$  נקבל פסוק שקר ( $2 < 1$ ). לכן התשובה נפסלת.

**תשובה (4):**  $|b| < |a|$ . אם נציב  $a = 2$  ו-  $b = -3$  נקבל פסוק שקר ( $3 < 2$ ). לכן התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

**דרך ב':** הבנה אלגברית

הסקנו ש- $a$  בהכרח חיובי. נמשיך לנתח את אי-השוויון במטרה להגיע למסקנות נוספות לגבי  $a$  ו- $b$ .

נתון ש- $|a + b| < a$ , ולפיכך  $-a < (a + b) < a$ . נפצל את אי-השוויון המשולש שקיבלנו לשני אי-

שוויונות ונפשט אותם אלגברית:

$a + b < a$ . נוריד  $a$  משני צדי אי-השוויון ונקבל ש- $b < 0$ . כלומר,  $b$  שלילי.

$-a < a + b$ . נעביר את  $-a$  אגף ונקבל ש- $0 < 2a + b$ . כלומר, הביטוי  $2a + b$  חיובי.

כדי שהביטוי  $2a + b$  יהיה חיובי,  $|b|$  חייב להיות קטן מ- $2a$ , אחרת הביטוי יהיה שלילי.

כלומר,  $|b| < 2a$ . זו בדיוק הטענה שמופיעה בתשובה (1).

**תשובה (1).**

**20.** שואלים אותנו כמה קיבל יונתן בבחינה בהיסטוריה, אם ידוע שממוצע הציונים שלו בשלוש בחינות –

לשון, ספרות והיסטוריה – הוא 77, ושקיבל בהיסטוריה ציון גבוה פי  $1\frac{1}{2}$  מהציון שקיבל בכל אחת

מהבחינות האחרות.

**דרך א':** נוסחת הממוצע

נתון שממוצע הציונים של יונתן בשלוש הבחינות הוא 77, ולכן נקבע כי סכום הציונים הכולל בשלוש הבחינות הוא  $3 \cdot 77$ .

נציג את ציוני הבחינות בלשון ובספרות באמצעות  $x$ , ואת הציון בבחינה בהיסטוריה באמצעות  $1\frac{1}{2}x$ ,

ונבנה משוואה לפיה  $x + x + \frac{3}{2}x = 3 \cdot 77$ .

נחלץ את  $x$  מהמשוואה, ונקבל  $x = 66$

$$\left( x + x + 1\frac{1}{2}x = 3 \cdot 77 \Rightarrow 3\frac{1}{2}x = 3 \cdot 77 \Rightarrow \frac{7}{2}x = 3 \cdot 77 \Rightarrow 7x = 3 \cdot 2 \cdot 77 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 2 \cdot 77}{7} = 66 \right)$$

לפיכך, יונתן קיבל בבחינות בלשון ובספרות 66, ובבחינה בהיסטוריה  $99 \left( 66 \cdot 1\frac{1}{2} = 99 \right)$ .

**דרך ב':** בדיקת התשובות המוצעות

**תשובה (1):** אם יונתן קיבל בבחינה בהיסטוריה 99, וציון זה גבוה פי  $\frac{3}{2}$  מציונו בשני המבחנים

האחרים, הרי שהציון שלו בכל אחד מהם הוא 66. במקרה זה ממוצע הציונים שלו יהיה שווה ל-77

$$\left( \frac{66 + 66 + 99}{3} = \frac{66}{3} + \frac{66}{3} + \frac{99}{3} = 22 + 22 + 33 = 77 \right)$$

התשובה הנכונה.

אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

**תשובה (1).**

---