הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-7)

.1 עלינו לפשט את הביטוי $\sqrt{12}+\sqrt{27}$.

דרך א': אלגברה

את 12 ניתן להציג גם כ- $3\cdot 4$, ואת 27 כ- $3\cdot 9$, כך שנקבל: $\sqrt{3\cdot 4}+\sqrt{3\cdot 9}$.

נשתמש בחוק שורשים לפיו $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ונקבל: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}$.

נזכור כי $\sqrt{4}=2$ וכי $\sqrt{9}=3$, ולפיכך: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{3}\cdot 2+\sqrt{3}\cdot 3$.

נותר לנו להוציא גורם משותף $\sqrt{3}$, ונקבל $\sqrt{3}(2+3)=\sqrt{3}\cdot 5$.

דרך ב': הערכת סדר גודל

$\sqrt{12}$ גדול מ- $\sqrt{9}$ וקטן מ- $\sqrt{16}$, ולכן שווה למספר בין 3 ל-4.

$\sqrt{27}$ גדול מ- $\sqrt{25}$ וקטן מ- $\sqrt{36}$, ולכן שווה למספר בין 5 ל-6 (קרוב יותר ל-5).

לפיכך הביטוי $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ צריך להיות מספר בין 8 ל-9.

נבדוק את התשובות המוצעות ונפסול תשובות שאינן מתאימות.

__תשובה (1)__: $\sqrt{3}$ שווה לכ-1.7 ומכאן ש- $5\sqrt{3}\simeq 5\cdot 1.7\simeq 8$. יכול להתאים.

__תשובה (2)__: $\sqrt{39}$ הוא מספר קטן מ- $\sqrt{49}$, כלומר מ-7. התשובה נפסלת.

__תשובה (3)__: $\sqrt{15}$ הוא מספר קטן מ- $\sqrt{16}$, כלומר מ-4. התשובה נפסלת.

__תשובה (4)__: $\sqrt{3}$ שווה לכ-1.7 ומכאן ש- $13\sqrt{3}$ בהכרח גדול מ-13. התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (1).

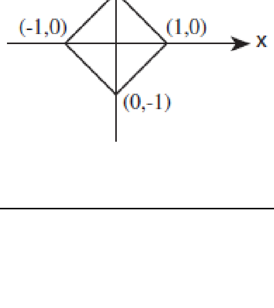
.2 עלינו למצוא את שטחו של הריבוע הנתון בסרטוט.

ניעזר בנוסחה לפיה שטח ריבוע שווה למחצית ממכפלת אלכסוניו.

ניתן לראות שאלכסון אחד של הריבוע מונח על ציר ה-x, וערכי ה-x של קודקודיו הם (-1) ו-1.

לכן אורכו שווה ל-2 ס"מ. האלכסונים בריבוע שווים זה לזה ולכן אין צורך לחשב את האלכסון הנוסף, אם כי קל לעשות זאת (הוא מונח על ציר ה-y וערכי ה-y של קודקודיו הם 1 ו- (-1)).

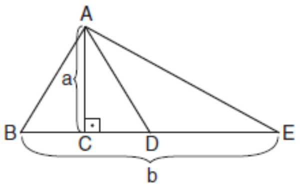
אם כן, שטח הריבוע יהיה שווה ל- $2\ \left(=\frac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}}\right)$ סמ"ר.



תשובה (2).

---

3. עלינו למצוא את שטחו של משולש ACD שבסרטוט.



ידוע כי שטח משולש שווה למחצית ממכפלת אחת מצלעותיו בגובה לאותה הצלע.

כיוון שנתונה לנו צלע BE במשולש ABE, וכמו כן נתון לנו הגובה לצלע זו, הישר AC, נתחיל מחישוב של שטח משולש זה. שטח משולש ABE יהיה שווה ל- $\frac{b \cdot a}{2}\left(=\frac{BE \cdot AC}{2}\right)$.

מכיוון ש-D מחלקת את הצלע BE לשני חלקים שווים, נקבע כי AD הוא תיכון במשולש ABE, ולפיכך מחלק את שטחו לשני משולשים שווי שטח (ABD ו-ADE), ששטח כל אחד מהם הוא $\frac{b \cdot a}{4}\left(=\frac{\frac{b \cdot a}{2}}{2}\right)$.

AC הוא גובה במשולש שווה השוקיים ABC, ולכן מהווה גם תיכון במשולש זה. כלומר, הוא מחלק את שטחו של משולש ABD לשני משולשים חופפים ובעלי שטח זהה (ABC ו-ACD). שטח כל אחד מהם יהיה שווה ל- $\frac{b \cdot a}{8}\left(=\frac{\frac{b \cdot a}{4}}{2}\right)$.

תשובה (1).

---

4. עלינו למצוא באיזו שעה סיים ספי לאכול את כל העוגיות שאפה נמרוד.

תחילה נמצא כמה עוגיות אפה נמרוד. נתון שהוא אופה 25 עוגיות בשעה, ושאפה עוגיות במשך 4 שעות (מ-08:00 עד 12:00). לפיכך, הוא אפה $100\ (=4 \cdot 25)$ עוגיות בסך הכול.

ספי אוכל 15 עוגיות בשעה, ולכן ייקחו לו $6\frac{2}{3}\left(=\frac{100}{15}\right)$ שעות לאכול את כל העוגיות שאפה נמרוד.

מכיוון שידוע שהחל לאכול את העוגיות בשעה 09:00, נקבע כי הוא יסיים לאכול אותן בשעה 15:40.

הערה: $6\frac{2}{3}$ שעות הן 6 שעות ו-40 דקות.

תשובה (3).

---

5. עלינו למצוא כמה עולה לרצף 1 מ״ר, אם ידוע שריצפו אולם ששטחו 625 מ״ר, ושמחיר ריצוף 40% ממנו היה 500 שקלים.

שטחו של האולם הוא 625 מ״ר, ו-40% משטח זה הם $250\ \left(\frac{40}{100} \cdot 625 = \frac{2}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{625}^{125} =\right)$ מ״ר.

אם 250 מ״ר עולים 500 שקלים, הרי שכל 1 מ״ר עולה $2\ \left(=\frac{500}{250}\right)$ שקלים.

תשובה (2).

---

6. נתונים שני מספרים שלמים a ו-b, וכמו כן נתון שהביטוי $a^2 \cdot b^2$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
שואלים אותנו איזו מהטענות שבתשובות בהכרח נכונה, ולכן נבדוק אותן.
ניעזר בהצבת דוגמה מספרית. נחפש a ו-b מתאימים לנתוני השאלה, נניח $a = 6$ ו- $b = 1$ (נקבל שהביטוי $a^2 \cdot b^2$ שווה ל-36, ואכן מתחלק ב-6 ללא שארית.
כעת נציב את המספרים בתשובות וננסה לפסול בעזרתם שלוש תשובות:
<u>תשובה (1)</u>: $6\,(= 6 \cdot 1)$ אינו מתחלק ב-12, ולכן התשובה נפסלת.
<u>תשובה (2)</u>: $6\,(= 6 \cdot 1)$ מתחלק ב-6 אך לא ב-12, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.
<u>תשובה (3)</u>: $6\,(= 6 \cdot 1^2)$ אינו מתחלק ב-8, ולכן התשובה נפסלת.
<u>תשובה (4)</u>: $6\,(= 6 \cdot 1^2)$ אינו מתחלק ב-8 (או ב-4), ולכן התשובה נפסלת.
פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (2).

---

7. שואלים אותנו מה היחס בין מספר הבנים למספר הבנות במשפחה מסוימת, אם ידוע כי כיום סכום גילי הבנים שווה לסכום גילי הבנות, וכי בעוד שנתיים סכום גילי הבנים יהיה גדול ב-6 מסכום גילי הבנות.
אם כיום סכום גילי הבנים שווה לסכום גילי הבנות, אז כדי שסכום הגילים של הבנים בעוד שנתיים יהיה גדול ב-6 מסכום גילי הבנות חייבים להיות $3\left(= \frac{6}{2}\right)$ בנים יותר מאשר בנות.

תשובה (3).

הסקה מתרשים (שאלות 8-11)

8. נשאלנו מה ההסתברות שהמכונה זיהתה אשכולית מסוימת בצורה נכונה.
ניתן לראות בטבלה שבאותו יום הוכנסו למכונה 20 אשכוליות, וש-8 מהן זוהו בצורה נכונה.
לפיכך, ההסתברות שהמכונה מזהה אשכולית כלשהי בצורה נכונה היא $\frac{2}{5}\left(= \frac{8}{20}\right)$

תשובה (2).

---

9. עלינו למצוא פרי שהסיכוי שזוהה נכונה נמוך מהסיכוי שזוהה כפרי אחר.
ניתן לראות שמתוך 20 אשכוליות רק 8 זוהו כאשכוליות, בעוד ש-9 מהן זוהו כתפוז. לפיכך יש סיכוי גבוה יותר שאשכולית תזוהה כתפוז מאשר שתזוהה כאשכולית.
<u>תשובה (4)</u>: בהינתן שפרי כלשהו הוא **אשכולית**, ההסתברות שהוא זוהה כ**תפוז** גדולה מההסתברות שזוהה נכונה.

תשובה (4).

---

10. שואלים אותנו כמה מהזיהויים שהפיקה המכונה **לא** עמדו בשתי דרישות: שכל לימון יזוהה כלימון, ושכל פרי שאינו לימון לא יזוהה כלימון. כלומר, עלינו לסכום את כמות הלימונים שזוהו כאשכוליות או תפוזים, ואת כמות האשכוליות ותפוזים שזוהו כלימונים.
יש לימון אחד שזוהה כתפוז, תפוז אחד שזוהה כלימון, ו-3 אשכוליות שזוהו כלימון.
לפיכך, יש בסך הכול $5\,(= 1 + 1 + 3)$ זיהויים של המכונה שלא עמדו בדרישות.

תשובה (3).

---

11. נתון שהמכונה זיהתה פרי מסוים כתפוז, ושואלים אותנו מה הסיכוי שהוא באמת תפוז.

יש לימון אחד שזוהה כתפוז, 8 תפוזים שזוהו כתפוז, ו-9 אשכוליות שזוהו כתפוז. לפיכך, המכונה זיהתה $18\ (=1+8+9)$ תפוזים.

מתוך 18 פירות שזוהו כתפוזים, רק 8 מהם הם באמת תפוזים, ולכן הסיכוי שהפרי שזוהה כתפוז הוא אכן תפוז שווה ל- $\frac{4}{9}\left(=\frac{8}{18}\right)$.

תשובה (2).

שאלות ובעיות (שאלות 12-20)

12. עלינו לסדר את A, B ו-C מהגדול לקטן, כאשר נתון לנו ששלושתם תלויים ב-x (נתון שהוא שלילי).

ניעזר בהצבת דוגמה מספרית בעבור x, נניח $x=-1$. כך נקבל A, B ו-C מספריים, ויהיה לנו קל יותר להשוות ביניהם.

A יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}\left((-1)^2-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\right)$, B יהיה שווה ל- $2\frac{1}{4}\left(\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\right)$, ו-C יהיה שווה ל- $-\frac{3}{2}\left((-1)^3-\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{2}=\right)$.

ניתן לראות כי B הוא הגדול מבין השלושה, ו-C הוא הקטן מביניהם. לכן $C<A<B$

תשובה (3).

---

13. נתונות שלוש משוואות ב-3 נעלמים, ומבקשים שנמצא את ערכו המספרי של אחד הנעלמים (y).

דרך א׳: בדיקת תשובות

נבדוק את ערכי ה-y שבתשובות, וננסה למצוא לאחד מהם x ו-z שייתנו לנו פסוקי אמת בכל שלוש המשוואות. נתחיל מ- $y=0$ כי זה הכי נוח.

במקרה הזה אפשר להציב גם במקום x ו-z את הערך המספרי 0, ולקבל שלושה פסוקי אמת. זה מספיק לנו כדי לסמן את תשובה (3), ואין צורך לבדוק תשובות נוספות.

דרך ב׳: אלגברה

נציב $x=y+z$ במשוואה $y=x+z$, ונקבל $0=z\left(\cancel{y}=\cancel{y}+z+z\Rightarrow 0=2z\Rightarrow\right)$.

באותו אופן, נציב $z=x+y$ במשוואה $y=x+z$, ונקבל $0=x\left(\cancel{y}=x+x+\cancel{y}\Rightarrow 0=2x\Rightarrow\right)$.

כעת נציב $z=0$ ו- $x=0$ באחת המשוואות, ונקבל שגם $y=0$.

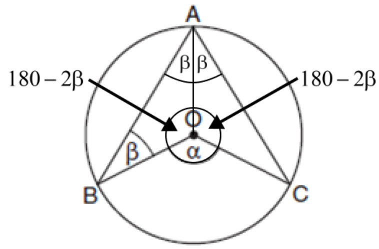
תשובה (3).

.14 עלינו להביע את β באמצעות α. ננסה לבנות משוואה המכילה את β ו- α, ונבודד ממנה את β.

תחילה נעביר בניית עזר רדיוס ממרכז המעגל O לעבר נקודה A.

מכיוון שידוע לנו ש- $AB = AC$, וש- $OA = OB = OC$ (שלושתם רדיוסים במעגל), נקבע כי משולשים AOB ו-AOC הם משולשים שווי שוקיים חופפים.

נתון שזווית הבסיס שלהם שווה ל- β, ולכן נקבע כי זווית הראש שלהם שווה ל- $180^\circ - 2\beta$.



מכיוון שזוויות הראש של שני המשולשים, יחד עם הזווית הנתונה α, משלימות יחד זווית עגולה שגודלה 360°, נוכל לבנות את המשוואה: $180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\beta + \alpha = 360^\circ$

נבודד את β ונקבל: $\beta = \frac{\alpha}{4} \Rightarrow (\alpha = 4\beta)$.

תשובה (4).

.15 נתונים 5 מספרים שלמים, גדולים מ-1 **ושונים** זה מזה. כמו כן, נתון שמכפלה של שניים מחמשת המספרים שווה ל-x, ומכפלה של שלושת המספרים הנותרים שווה גם היא ל-x.

מכיוון ששואלים אותנו מה ***יכול להיות*** ערכו של x, נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 40. המחלקים של 40 הם: 1, 40, 2, 20, 4, 10, 5 ו-8. לא ניתן למצוא שני מחלקים שונים שמכפלתם שווה ל-40 כך שיוותרו שלושה מחלקים נוספים שונים מהם שמכפלתם גם כן שווה ל-40. לכן נבדוק תשובה אחרת.

<u>תשובה (2)</u>: 42. המחלקים של 42 הם: 1, 42, 2, 21, 3, 14, 6 ו-7. לא ניתן למצוא שני מחלקים שונים שמכפלתם שווה ל-42 כך שיוותרו שלושה מחלקים נוספים שונים מהם שמכפלתם גם כן שווה ל-42. לכן נבדוק תשובה אחרת.

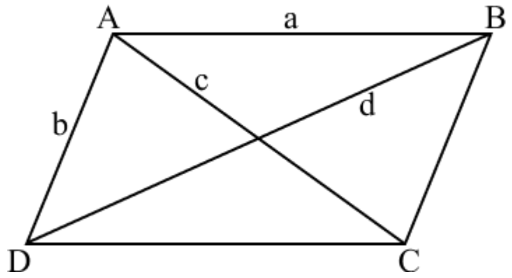
<u>תשובה (3)</u>: 60. המחלקים של 60 הם: 1, 60, 2, 30, 3, 20, 4, 15, 5, 12, 6 ו-10. שניים מהמספרים יכולים למשל להיות 6 ו-10 $(6 \cdot 10 = 60)$, ושלושת המספרים הנוספים יכולים להיות 4, 5 ו-3 $(4 \cdot 5 \cdot 3 = 60)$. לפיכך, ערכו של x יכול להיות 60, וזו התשובה הנכונה.

אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

תשובה (3).

.16 נתון שהיקף מקבילית שווה ל-P, וסכום אורכי האלכסונים שלה שווה ל-L, ושואלים אותנו מי מבין P ו-L גדול יותר.

לצורך ההסבר נסרטט מקבילית ABCD שאורכי הצלעות שלה הם a ו-b. אחד האלכסונים יהיה c, והאחר d.



ידוע שסכום שתי צלעות במשולש בהכרח גדול מהצלע השלישית שלו ולכן:

באמצעות משולש ABC נוכל לקבוע כי $AC < AB + BC \quad (c < a + b)$, ובאמצעות משולש DAB נוכל לקבוע כי $DB < DA + AB \quad (d < a + b)$. אנחנו רואים כי מחצית מהיקף המקבילית גדול מאלכסון אחד שלו, ומחצית מהיקף המקבילית גדול מהאלכסון האחר שלו. לפיכך היקף המקבילית כולו גדול מסכום שני האלכסונים שלו $(c + d < 2a + 2b)$.

נסמן את <u>תשובה (1)</u>: $L < P$.

תשובה (1).

.17 נתון שתינוק התעורר בממוצע 3 פעמים בכל לילה בשבוע מסוים. כמו כן, נתון לנו כמה פעמים התעורר בפועל בשלושת הלילות הראשונים של אותו שבוע (5 פעמים, 4 פעמים ו-x פעמים), ושואלים כמה פעמים התעורר **לכל היותר** בלילה השביעי.

לפי נוסחת הממוצע ניתן לקבוע שאם התינוק התעורר בממוצע 3 פעמים בכל לילה במשך 7 לילות סך הכול, הרי שהתעורר בפועל $21 \; (= 3 \cdot 7)$ פעמים באותו שבוע.

אם נוריד ממספר זה את כמות הפעמים שבהם התעורר בפועל בשלושת הלילות הראשונים נקבל שבארבעת הלילות הנותרים הוא התעורר בסך הכול $12 - x \; (21 - 5 - 4 - x =)$ פעמים.

כדי למצוא כמה פעמים **לכל היותר** התעורר התינוק בלילה השביעי, נרצה שיתעורר כמה שפחות פעמים בשאר הלילות. יכול בהחלט להיות שהוא לא התעורר כלל בלילות הרביעי, החמישי והשישי, ואז התעורר את כל $12 - x$ הפעמים בלילה השביעי. לפיכך, התינוק התעורר **לכל היותר** $12 - x$ פעמים בלילה השביעי.

תשובה (4).

.18 נתון שבסוף החודש הראשון היו באקווריום n דגים, ושבכל חודש גדל מספרם פי n. עוד נתון שבסוף החודש ה-n היה מספר הדגים באקווריום דו-ספרתי, ושואלים אותנו מהו n.

נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 1. במקרה זה מספר הדגים באקווריום בסוף החודש הראשון הוא 1. נתון שבסוף החודש ה-1 מספר הדגים באקווריום הוא דו-ספרתי (1 אינו דו-ספרתי), ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 2. במקרה זה מספר הדגים באקווריום בסוף החודש הראשון הוא 2. מספר הדגים מוכפל בכל חודש פי 2, ולכן בסוף החודש השני יהיה $4 \; (= 2 \cdot 2)$. נתון שבסוף החודש ה-2 מספר הדגים באקווריום הוא דו-ספרתי (4 אינו דו-ספרתי), ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: . במקרה זה מספר הדגים באקווריום בסוף החודש הראשון הוא 3. מספר הדגים מוכפל בכל חודש פי 3, ולכן בסוף החודש השני יהיה $9 \; (= 3 \cdot 3)$, ובסוף החודש השלישי יהיה

$27\left(=3\cdot3\cdot3\right)$. נתון שבסוף החודש ה-3 מספר הדגים באקווריום הוא דו-ספרתי. 27 הוא אכן דו-ספרתי, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

19. שואלים אותנו כמה נקודות, **לכל היותר**, ניתן לצייר על דף כך שהמרחק בין כל נקודה אחת לכל נקודה אחרת יהיה קבוע (במקרה הזה 6, אם כי זה לא באמת משנה).

ניתן לצייר משולש שווה-צלעות שצלעותיו 6 ס״מ. במקרה זה שלושת הקודקודים הם שלוש נקודות שהמרחק בין כל נקודה אחת לכל נקודה אחרת הוא 6 ס״מ.

אם ננסה לחזור על הפעולה ולצייר ריבוע שצלעותיו 6 ס״מ ניתקל בבעיה. המרחק בין כל קודקוד לשני הקודקודים הסמוכים אליו יהיה זהה ושווה ל-6 ס״מ, אך המרחק בין קודקוד לבין קודקוד שאינו סמוך לו יהיה שונה מ-6 ס״מ (הוא יהיה שווה לאלכסון הריבוע, במקרה זה $6\sqrt{2}$ ס״מ).

אם ננסה לצייר מחומש משוכלל או משושה משוכלל בעלי צלע שאורכה 6 ס״מ ניתקל בהכרח באותה בעיה (המרחק בין קודקודים שאינם סמוכים זה לזה יהיה שונה מ-6 ס״מ), ולכן נסיק כי לא ניתן לצייר יותר מ-3 נקודות שמקיימות את התנאי לפיו המרחק בין כל נקודה אחת לכל נקודה אחרת קבוע.

תשובה (3).

---

20. נתונה משוואה בשני נעלמים x ו-y, ומבקשים שנביע את y באמצעות x.

נפתור את השאלה באופן אלגברי:

נכניס את שני השברים בצד שמאל של המשוואה תחת מכנה משותף ונקבל:

$$\left(\frac{x}{(y+1)}+\frac{y}{(x+1)}=1\Rightarrow\right)\frac{x(y+1)+y(x+1)}{(x+1)\cdot(y+1)}=1.$$

נכפול את שני צדי המשוואה ב- $(x+1)\cdot(y+1)$ ונקבל:

$$x(y+1)+y(x+1)=(x+1)\cdot(y+1).$$

נבצע פתיחת סוגריים ונקבל:

$$xy+x+xy+y=xy+x+y+1.$$

נותר לנו לבודד את y ונקבל:

$$\left(\cancel{xy}+\cancel{x}+xy+\cancel{y}=\cancel{xy}+\cancel{x}+\cancel{y}+1\Rightarrow xy=1\Rightarrow\right)y=\frac{1}{x}$$

תשובה (4).
