הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. 7 ילדים מקבלים סוכריות. הראשון קיבל סוכרייה אחת, השני קיבל 2 סוכריות, השלישי קיבל 3 סוכריות, וכך הלאה. כלומר, כל הילדים קיבלו יחד: $28 \left(=1+2+3+4+5+6+7\right)$ סוכריות.

אם הילדים התחלקו ל-2 קבוצות שבכל אחת מהן מספר שווה של סוכריות, הרי לכל אחת מהקבוצות היו $14 \left(=\frac{28}{2}\right)$ סוכריות.

תשובה (4).

---

2. עלינו למצוא את ערכי נקודה F המהווה את אמצע הקטע CD.

נתון שנקודה E היא אמצע הקטע AB. כיוון שידוע לנו שערכי נקודה A הם (0,12), וערכי נקודה B הם (20,0), נקבע כי ערכי נקודה E הם $\left(10,6\right) \Leftarrow \left(\frac{0+20}{2}, \frac{12+0}{2}\right)$.

כעת נמצא את נקודות C ו-D.

הישר ED מקביל לציר ה-y, ולכן לנקודות על ישר זה יש את אותו ערך x. מכאן ערך ה-x של נקודה D שווה ל-10. מכיוון שהנקודה נמצאת על ציר ה-x, נקבע כי ערך ה-y שלה שווה ל-0. כלומר, מצאנו שערכי נקודה D הם (10,0).

הישר EC מקביל לציר ה-x, ולכן לנקודות על ישר זה יש את אותו ערך y. מכאן ערך ה-x של נקודה C שווה ל-6. מכיוון שהנקודה נמצאת על ציר ה-y, נקבע כי ערך ה-x שלה שווה ל-0. כלומר, מצאנו שערכי נקודה C הם (0,6).

כעת משמצאנו שערכי נקודה D הם (10,0), וערכי נקודה C הם (0,6), נקבע כי ערכי נקודה F, הנמצאת על אמצע קטע CD, הם $\left(5,3\right) \Leftarrow \left(\frac{0+10}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$.

תשובה (2).

---

3. נתון ש-x ו-y הם שני מספרים שלמים, **שונים זה מזה**, ושואלים אותנו מהו הערך **הקטן** ביותר האפשרי בעבור הביטוי $\left(x-y\right)^2$. נבדוק את הערכים הנתונים בתשובות: 0, 1, 2 ו-4, כשאנו מתחילים כמובן מהערך הקטן ביותר מבין הערכים המוצעים.

הפרש בין שני מספרים שלמים שונים זה מזה **לא יכול** להיות שווה 0, ולכן גם ריבוע התוצאה של ההפרש ביניהם לא יכול להיות שווה ל-0. תשובה זו נפסלת.

הפרש בין שני מספרים שלמים **יכול להיות** שווה ל-1 או ל-(1-), ואז ריבוע התוצאה של ההפרש ביניהם יהיה 1. זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

4. מבקשים שנבטא את דרגת הקושי של פאזל, כאשר ידוע שהיא נקבעת על פי מספר חלקיו (N) ועל פי מספר הגוונים המופיעים בו (C). דרגת הקושי של הפאזל גבוהה יותר ככל שמספר חלקיו גדול יותר וככל שמספר הגוונים המופיעים בו קטן יותר. אם כך, עלינו למצוא בתשובות ביטוי שבו כש-N גדל הביטוי גדל, וכש-C גדל הביטוי קטן.

נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{N}{C}$. בביטוי זה N נמצא במונה, ולפיכך ככל שהוא יגדל כך גם ערכו של הביטוי יגדל. כמו כן, בביטוי זה C נמצא במכנה, ולפיכך ככל שהוא יגדל כך יקטן ערכו של הביטוי. מכאן שזו התשובה הנכונה.

לצורך שלמות ההסבר נסביר מדוע הביטויים שבשאר התשובות אינם מתאימים לנתוני השאלה.

<u>תשובה (2)</u>: $N \cdot C$. בביטוי זה ככל ש-C יגדל כך גם ערכו של הביטוי יגדל. לכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $N + C$. גם בביטוי זה ככל ש-C יגדל כך גם ערכו של הביטוי יגדל. לכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $C - N$. בביטוי זה ככל ש-C יגדל כך גם ערכו של הביטוי יגדל, וככל ש-N יגדל ערכו של הביטוי יקטן. ביטוי זה מתאר מקרה הפוך מזה שנתון לנו, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

5. נתונה משוואה בנעלם אחד לפיה $x^3 = 9^6$, ומבקשים שנמצא את ערכו המספרי.

נבדוק את התשובות המוצעות בעזרת שימוש בחוקי חזקות.

<u>תשובה (1)</u>: נציב במשוואה $x = 9^2$, ונקבל: $\left(9^2\right)^3 = 9^6$. לפי חוקי חזקות $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, ומכאן שהביטוי בצד שמאל של המשוואה, בדיוק כמו הביטוי שבצד ימין שלה, שווה ל- $\left(9^{2 \cdot 3} =\right) 9^6$. קיבלנו פסוק אמת, ולכן זו התשובה הנכונה. אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

תשובה (1).

---

6. נתון משולש שזוויותיו הן α, 2α ו- 3α, ושואלים אותנו פי כמה גדולה הצלע שמול הזווית 3α מזו שמול הצלע α.

ידוע שסכום זוויותיו של משולש שווה ל- 180°, ומכאן ש- $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$. נחלץ את α מהמשוואה, ונגלה כי: $\alpha = 30^\circ \left(6\alpha = 180^\circ \Rightarrow\right)$. אם כן, המשולש הנתון הוא משולש שזוויותיו הן $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. במשולש זה היתר גדול פי 2 מהניצב הקטן, כלומר הצלע שמול הזווית 3α גדולה פי 2 מזו שמול הצלע α.

תשובה (2).

---

7. עלינו למצוא את גודלה של $\sphericalangle BED$ בסרטוט הנתון.

נתון שצלע BC של המקבילית שבסרטוט שווה ל-x, ולכן גם צלע AD שמולה שווה ל-x. מכיוון ש-ED שווה ל- $x - y$, נקבע כי AE המהווה את ההפרש בין AD ל-ED, תהיה שווה ל- $x - \left(x - y\right) = y$.

מכיוון שנתון לנו שגם AB שווה ל-y, נקבע כי משולש BAE הוא משולש שווה שוקיים.

כעת נסמן זוויות על גבי הסרטוט, במטרה למצוא את $\sphericalangle BED$. נתון ש- $\sphericalangle BCD = 130^\circ$, ולכן גם $\sphericalangle BAE = 130^\circ$ (זוויות נגדיות במקבילית). זוויות $\sphericalangle ABE$ ו- $\sphericalangle AEB$ הן זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים שזווית הראש שלו שווה ל- 130°, ולכן כל אחת מהן תהיה שווה ל- $25^\circ \left(= \frac{180^\circ - 130^\circ}{2}\right)$.

אם $\sphericalangle AEB$ שווה ל- 25°, אז $\sphericalangle BED$ המשלימה אותה ל- 180°, תהיה שווה ל- $180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.

תשובה (1).

---

8. עלינו למצוא את הטווח המדויק שבו b יכול להימצא, בהינתן ש- $\left(1+2b\right)^2 < \left(2+b\right)^2$.

נפשט את אי-השוויון הנתון במטרה לבודד את b. תחילה נפתח את הביטויים שמשני צדי אי-השוויון בעזרת נוסחת הכפל המקוצר הראשונה, ונקבל: $1+4b+4b^2 < 4+4b+b^2$.

לאחר מכן נחסר $1 + 4b + b^2$ משני צדי אי-השוויון, ונקבל: $3b^2 < 3$.

נותר לנו לחלק את שני צדי אי-השוויון ב-3, ונקבל $b^2 < 1$. כדי שאי-השוויון יתקיים, על b להיות בין -1 ל-1.

תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. עלינו למצוא באיזה מהזמנים שבתשובות היה ממוצע טמפרטורות הגוף של ארבעת הזוחלים **הגבוה** ביותר. נזכור כי ממוצע טמפרטורות הגוף של ארבעת הזוחלים בזמן מסוים שווה לסכום הטמפרטורות שלהם בזמן זה לחלק לכמות הזוחלים. מכיוון שכמות הזוחלים נותרת זהה, עלינו להתמקד בסכום הטמפרטורות, ולחפש את הסכום הגבוה ביותר.

נבדוק את סכומי הטמפרטורות בכל אחד מהזמנים המוצעים בתשובות. מכיוון שגובה הטמפרטורה של כל זוחל בזמן מסוים נקבע לפי ערכו על הציר האנכי, נחפש למצוא שעה שבה גובה העקומות הוא **הגבוה** ביותר.

ניתן לראות שמהשעה 11:00 עד השעה 13:00 העקומה של כל הזוחלים נמצאת במגמת עליה. לכן, אין טעם לחשב את סכום הטמפרטורות של הזוחלים בשעה 11:00, שכן הוא בהכרח נמוך יותר מסכום הטמפרטורות בשעה 13:00.

באותו אופן, ניתן לראות שמהשעה 16:00 עד השעה 18:00 העקומה של כל הזוחלים נמצאת במגמת ירידה, . לכן, אין טעם לחשב את סכום הטמפרטורות של הזוחלים בשעה 18:00, שכן הוא בהכרח נמוך יותר מסכום הטמפרטורות בשעה 16:00.

נותר לנו להשוות בין סכום הטמפרטורות בשעה 13:00 לבין סכום הטמפרטורות בשעה 16:00. ניתן לראות בעין כי סכום הטמפרטורות המצטבר בשעה 13:00` מעט גבוה יותר מאלו שבשעה 16:00, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

10. נשאלנו אצל איזה מהזוחלים במהלך כל פרק זמן שבו טמפרטורת הגוף עלתה, רמת הפעילות עלתה או נשארה קבועה.

תחילה נבין מה אנחנו מחפשים מבחינה ויזואלית. טמפרטורת הגוף מיוצגת על ידי הציר האנכי ולכן טמפרטורת גוף עולה כשהעקומה של אותו זוחל נמצאת במגמת עליה ככל שמתקדמים ימינה על גבי ציר הזמן. מכאן שיש להסתכל רק על הקטעים שבהם העקומות נמצאות בעליה, ולחפש מקרה שבו לכל אורך הקטע הנבדק רמת הפעילות עולה או נשארת קבועה, כלומר שהמספרים המייצגים את רמת הפעילות אינם יורדים לכל אורכו.

ניתן לראות שאצל השממית המספרים המייצגים את רמת הפעילות עולים כל עוד העקומה נמצאת במגמת עליה, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

11. עלינו למצוא מי מהזוחלים הוא המתאים ביותר להיות הזוחל שנמצא ברמת הפעילות המירבית שלו רק למשך פרקי זמן קצרים מאוד במהלך היום.

מרגע שזוחל עובר לרמת פעילות מסוימת, ועד הרגע שהוא עובר לרמת פעילות אחרת, הוא נמצא ברמת פעילות זו. כלומר, עלינו למצוא אצל מי מהזוחלים קטע העקומה מהרגע שהוא עובר לרמת הפעילות המקסימלית שלו, ועד שהוא משנה רמת פעילות, הוא **הקצר** ביותר.

נבדוק זאת בעבור כל אחד מהזוחלים.

<u>תשובה (1)</u>: האיגואנה. רמת הפעילות המקסימלית שלה היא רמה 4 (היא נמצאת בה ארבע פעמים), ובכל פעם שהיא מגיעה לרמה זו היא מיד משנה את רמת הפעילות שלה לרמה 2. כלומר, קטעי העקומה שבה האיגואנה נמצאת ברמת הפעילות המקסימלית שלה מאוד קצרים.

<u>תשובה (2)</u>: הזיקית. רמת הפעילות המקסימלית שלה היא רמה 4, והיא נמצאת ברמה זו פרק זמן ארוך יחסית עד שמשנה רמת פעילות לרמה 3 (החל מהשעה 07:00 ועד אחרי השעה 09:00). התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: החרדון. רמת הפעילות המקסימלית שלה היא רמה 5, והיא נמצאת ברמה זו פרק זמן ארוך יחסית עד שמשנה רמת פעילות לרמה 3 (החל מהשעה 09:30 בערך ועד אחרי השעה 10:30). התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: השממית. רמת הפעילות המקסימלית שלה היא רמה 5, והיא נמצאת ברמה זו פרק זמן ארוך יחסית עד שמשנה רמת פעילות לרמה 4 (החל מהשעה 14:00 ועד אחרי השעה 16:00). התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

12. עלינו לבדוק את הטענות שבתשובות:

<u>תשובה (1)</u>: ככל ש**טמפרטורת הגוף** של זוחל בתחילת היום נמוכה יותר כך רמת הפעילות שלו בסוף היום נמוכה יותר. נדרג את הזוחלים לפי טמפרטורת הגוף שלהם בתחילת היום, ולפי רמת הפעילות שלהם בסוף היום, ונבדוק האם הקשר מתקיים.

הזוחלים מדורגים כך (**בסדר יורד**) מבחינת טמפרטורת הגוף שלהם בתחילת היום: זיקית, שממית, חרדון ואיגואנה. הזוחלים מדורגים כך (**בסדר יורד**) מבחינת רמת הפעילות שלהם בסוף היום: זיקית (רמה 4), שממית (רמה 3), חרדון (רמה 2) ואיגואנה (רמה 1).

הקשר אכן מתקיים, ולכן זו התשובה הנכונה. אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. לפנינו תרגיל אותיות ושואלים אותנו איזו מהטענות שבתשובות נובעת ממנו **בהכרח**. נבדוק אותן:

<u>תשובה (1)</u>: אם A גדול מ-5 אזי האיבר הראשון בתרגיל החיבור שלפנינו (AA) שווה ל-66 או יותר. מכאן שכדי שתוצאת התרגיל תהיה מספר דו-ספרתי כפי שנתון בשאלה (CC), על האיבר השני בתרגיל החיבור (BB) להיות שווה לכל היותר ל-33. מכאן ש-B חייב להיות מספר הקטן מ-5. זו התשובה הנכונה, ואין צורך לבדוק תשובות נוספות.

לצורך שלמות ההסבר נעבור גם על שאר הטענות ונראה מדוע הן לא בהכרח נכונות:

<u>תשובה (2)</u>: A ו-B יכולים למשל להיות שווים ל-4 ואז נקבל את התרגיל: $88 = 44 + 44$. לפי תרגיל זה האות C יכולה להיות גם 8 ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: A ו-B יכולים למשל להיות שווים שניהם ל-1 (לא נאמר שהם שונים) ואז נקבל את התרגיל: $22 = 11 + 11$, תרגיל תקין שבו C שווה ל-2. הראנו ש- $A + B$ יכול להיות גם מספר קטן מ-5, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: מבט על הטורים בתרגיל מלמד אותנו שעל מנת שהוא יתקיים על $A + B$ להיות שווה ל-C, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

14. נתון שלאלון יש 4 כדורים: **שחור**, **לבן**, **אדום** ו**ירוק**, ושואלים אותנו בכמה דרכים שונות ניתן לסדר אותם בשורה כך שהשחור והלבן יהיו זה לצד זה, וגם האדום והירוק יהיו זה לצד זה.

מכיוון שמספר הדרכים לסידור הכדורים בהתאם למגבלה הנתונה אינו גדול, נפרוט אותן באופן שיטתי:

(**ש** = שחור, **ל** = לבן, **א** = אדום, **י** = ירוק)

שלאי, לשאי, שליא, לשיא, אישל, אילש, יאשל, יאלש.

מצאנו שיש 8 דרכים שונות לסידור הכדורים בשורה, כך שהשחור והלבן יהיו זה לצד זה, וגם האדום והירוק יהיו זה לצד זה.

תשובה (2).

---

15. שואלים אותנו מה שטחו של עיגול שאורך הרדיוס שלו שווה לאורך המקצוע של קובייה ששטח פניה 18 סמ"ר

נגדיר את אורך המקצוע של הקובייה באמצעות a, נשווה את שטח הפנים שלה $\left(6\cdot a^2\right)$ ל-18, ונחלץ את a. נקבל ש- $a=\sqrt{3}$ $\left(6\cdot a^2=18\Rightarrow a^2=3\Rightarrow\right)$. רדיוס המעגל שאת שטחו אנו מתבקשים למצוא שווה למקצוע הקובייה, כלומר ל- $\sqrt{3}$, ולכן שטחו יהיה שווה ל- 3π $\left(R^2\cdot\pi=\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\pi=\right)$.

תשובה (3).

---

16. שואלים אותנו מהי מהירותו של חתול (x), אם ידוע כי הוא עבר 60 מטרים עד שהגיע לשער חשמלי, **בזמן ש**השער נסגר.

מכיוון שידוע לנו מהו המרחק שעבר החתול, נותר לנו למצוא את הזמן שלקח לו לעבור מרחק זה. לאחר מכן נוכל להציב את המרחק והזמן בנוסחת התנועה, ולחלץ ממנה את מהירותו של החתול.

רוחב פתחו של השער החשמלי בתחילת הריצה של החתול היה 300 מטרים, וכשהחתול הגיע אל השער רוחבו היה 180 מטרים. מכאן ש- 120 $\left(=300-180\right)$ מטרים מרוחב הפתח נסגרו. כיוון שידוע לנו שמהירות סגירת השער היא 10 מטרים לשנייה, נקבע כי לקחו לו בדיוק 12 $\left(\frac{120}{10}=\right)$ שניות עד ש-120 מטרים מרוחבו נסגרו. זהו גם זמן הריצה של החתול.

נציב את זמן הריצה של החתול ואת המרחק שעבר בנוסחה, ונקבל שמהירות החתול היא 5 $\left(\frac{60}{12}=\right)$ מטרים לשנייה.

תשובה (3).

---

17. שואלים אותנו מה שוויו של פרנק אחד בלירות, אם ידוע ש**דינר** אחד שווה ל-3.6 לירות, וש-4 פרנקים שווים ל-9 **דינרים**.

נתון ש-9 דינרים שווים ל-4 פרנקים, ולכן **דינר** שווה ל- $\frac{4}{9}$ פרנק. בנוסף, נתון ש**דינר** שווה גם ל- $\frac{36}{10}$ לירות. לכן נקבע ש- $\frac{4}{9}$ פרנק שווים ל- $\frac{36}{10}$ לירות. כדי למצוא כמה שווה פרנק אחד יש להרחיב את הנתונים בשבר ההופכי ל- $\frac{4}{9}$, כלומר ב- $\frac{9}{4}$, ונקבל ש-1 $\left(=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}\right)$ פרנק שווה ל- 8.1 $\left(=\frac{\cancel{36}^{9}}{10}\cdot\frac{9}{\cancel{4}_{1}}=\frac{9\cdot9}{10}=\frac{81}{10}=\right)$ לירות.

תשובה (4).

.18 הגדילו מספר חיובי כלשהו **ב**-4,000%, ושואלים אותנו **פי** כמה גדל המספר.

מכיוון שבשאלה אין נתונים ממשיים, ניעזר בהצבת דוגמה מספרית כדי לפתור אותה. נניח שהמספר הוא 100. 4,000% מ-100 הם 4,000, ולכן המספר לאחר הגידול יהיה $4{,}100\ (=100+4{,}000)$.

אם כן, המספר החדש גדול **פי** $41\ \left(=\frac{4{,}100}{100}\right)$ מהמספר המקורי.

תשובה (3).

.19 עלינו למצוא כמה נקודות תוכל תמר לצייר, אם היא רוצה שמרחקן מ-3 נקודות הנמצאות על ישר במרחקים שווים זו מזו (x) יהיה זהה וגדול מ-x.

הדרך היחידה שבה שלוש נקודות יהיו במרחקים שווים זו מזו היא אם נצייר משולש ישר זווית שאורך צלעו x. תמר מעוניינת לצייר נקודה נוספת שמרחקה מכל הנקודות זהה. הדרך היחידה לעשות זאת היא אם הנקודה תהיה במרכז המשולש, אך מכיוון שמרחקה של הנקודה הנוספת משלוש הנקודות צריך להיות גדול מ-x, כלומר גדול מצלע המשולש, מצב זה אינו אפשרי.

מכאן שלא ניתן למצוא נקודה מתאימה שנמצאת באותו מרחק מכל הנקודות.

תשובה (4).

.20 נתון ש-A שווה למכפלת שלושה מספרים ראשוניים שונים זה מזה, ושואלים אותנו כמה מחלקים יש לו.

מכיוון שאין נתונים ממשיים בשאלה, ניתן להיעזר בהצבת דוגמה מספרית נוחה כדי לפתור אותה.

נניח ששלשת המספרים הראשוניים שמכפלתם שווה ל-A הם: 2, 3 ו-5. במקרה זה נקבל ש-A שווה ל-$30\ (=2\cdot3\cdot5)$.

המחלקים של 30 הם: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ו-30. כלומר, יש לו 8 מחלקים בסך הכול.

הערכים המתקבלים בתשובות (1) עד (3) כאשר מציבים בהן A שווה ל-30 שונים מ-8, והן נפסלות. לכן, התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (4).
