הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. שואלים אותנו מה המספר המקסימלי של תושבים שנכחו בישיבה, אם ידוע כי 10 מהם הצביעו בעד ההצעה שעלתה, 3 נמנעו, ומספר לא ידוע של תושבים הצביעו נגדה, וכמו כן ידוע שההצעה התקבלה ברוב קולות.

אם ההצעה התקבלה ברוב קולות הרי ש**לכל היותר** 9 משתתפים הצביעו נגדה. לפיכך, בישיבה השתתפו **לכל היותר** $22\ (10+3+9=)$ תושבים.

תשובה (3).

---

2. עלינו לחשב את היקפו של טרפז ששלוש מצלעותיו הן צלעות של משושה משוכלל שהיקפו 6a, וצלעו הנוספת היא אלכסון מרכזי במשושה המשוכלל. נמצא את אורכי הצלעות של הטרפז ונחבר אותם:

אם היקפו של המשושה המשוכלל הוא 6a, הרי שכל אחת מצלעותיו שווה ל- $a\ \left(=\frac{6a}{6}\right)$. אלכסון מרכזי

במשושה משוכלל גדול פי 2 מהצלע שלו, ולכן יהיה שווה ל-2a.

לפיכך, היקפו של הטרפז יהיה $5a\ (a+a+a+2a=)$.

תשובה (2).

---

3. נתונות שתי משוואות בשני נעלמים (x ו-y), ומבקשים שנמצא את ערכו המספרי של y.

תחילה נפשט את המשוואה הראשונה. נתון ש-x שונה מ-0, ולכן ניתן לחלק בו את שני צדי המשוואה. נקבל ש- $4-y=x$

כעת נחליף את x במשוואה השנייה ב- $(4-y)$, ונקבל $3x=y \Rightarrow 3(4-y)=y$. נותר לנו לבודד את y, ונקבל ש- $3(4-y)=y \Rightarrow 12-3y=y \Rightarrow 12=4y \Rightarrow 3=y$

תשובה (3).

---

4. נתונה משוואה לפיה $m^{2x}=m\cdot m^{(x^2)}$. כמו כן, נתון ש-m הוא שלם הגדול מ-1, ומבקשים שנמצא את x.

דרך א': אלגברה

לפנינו משוואה מעריכית. נשווה את הבסיסים בשני צדי המשוואה, ולאחר מכן נוכל ליצור להשוות בין המעריכים, ולחלץ את x.

לפי חוקי חזקות, ניתן להציג את הביטוי בצד ימין של המשוואה גם כך: $m\cdot m^{(x^2)}=m^1\cdot m^{(x^2)}=m^{1+x^2}$.

נקבל את המשוואה $m^{2x}=m^{1+x^2}$. כעת נוכל להשוות בין המעריכים ונקבל $2x=1+x^2$.

נפשט את המשוואה ונמצא ש- $2x=1+x^2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

<u>הערה</u>: השוואת מעריכים מותרת רק כאשר ידוע לנו שהבסיסים (במקרה זה m) **אינם** שווים ל-0, 1 או (-1). במקרה זה נתון ש-m גדול מ-1 ולכן השוואת המעריכים אפשרית.

דרך ב': בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: נציב $x=1$ ונקבל: $m^2=m\cdot m^1\ \left(m^{2\cdot 1}=m\cdot m^{(1^2)} \Rightarrow\right)$. קיבלנו פסוק אמת ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

5. נתונות שתי נקודות על גבי מערכת צירים, האחת על ציר ה-x והאחרת על ציר ה-y, ושואלים אותנו על אורך הקטע המחבר ביניהן.

לצורך ההסבר נגדיר את ראשית הצירים באמצעות O.

על פי הנקודות הנתונות נקבע כי אורכו של הישר OA שווה ל-17.5, ואורכו של הישר OB שווה ל-12.5.

הישר AB יחד עם הישרים OA ו-OB יוצרים משולש ישר זווית, שבו AB מהווה יתר.

סכום שתי צלעות במשולש בהכרח גדול מהצלע השלישית, ולכן $AB < 30 \left(AB < 12.5 + 17.5 \Rightarrow\right)$.

תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

כמו כן, מכיוון ש-AB הוא יתר במשולש ישר זווית שאורכי צלעותיו נתונים, נקבע כי ניתן למצוא את אורכו באמצעות הצבת אורכי הניצבים בנוסחת פיתגורס. תשובה (4) נפסלת.

תשובה (3).

---

6. אלישבע תורמת 575 ספרים לשלושה בתי ספר ביחס חלוקה של 5:9:11, ועלינו למצוא כמה ספרים קיבל בית הספר שאלישבע תרמה לו את מספר הספרים הרב ביותר.

נפתור את השאלה באמצעות משוואה. נניח כי בית ספר א קיבל 5x ספרים, בית ספר ב קיבל 9x ספרים, ובית ספר ג קיבל 11x ספרים. נתון שסך הספרים שחולקו הוא 575, ולכן ניתן לבנות משוואה לפיה:

$5x + 9x + 11x = 575$. נחלץ את x ונמצא כי $x = 23 \left(25x = 575 \Rightarrow x = \frac{575}{25} \Rightarrow\right)$.

נותר לנו למצוא כמה ספרים קיבל בית הספר שאלישבע תרמה לו את מספר הספרים הרב ביותר, כלומר כמה הם 11x. נציב $x = 23$ ונגלה כי בית הספר שקיבל הכי הרבה ספרים קיבל בסך הכול $253 \left(11 \cdot 23 = (10+1) \cdot 23 = 230 + 22 =\right)$ ספרים.

הערה: אפשר היה להימנע מחישוב מלא של תוצאת התרגיל $11 \cdot 23$, ולהסתפק בחישוב ספרת האחדות של התוצאה כדי לפסול את תשובות (1) עד (3).

תשובה (4).

---

7. שואלים אותנו כמה הרכבים שונים יכולים להיות לשלישייה שתעלה לגמר, אם ידוע כי ארבעה מתמודדים מתחרים ביניהם על העלייה. מכיוון שמספר האפשרויות מצומצם, ניתן לפרוט את כל ההרכבים האפשריים באופן שיטתי. לגמר יכולים לעלות כל המתמודדים **למעט** דניאל, כל המתמודדים **למעט** בתיה, כל המתמודדים **למעט** גלית או כל המתמודדים **למעט** דניאל. כלומר, יש 4 הרכבים אפשריים, שונים זה מזה, לשלישיית הגמר.

תשובה (4).

---

8. נתונים מעגל וגזרת מעגל בעלי שטחים **שווים**. הזווית המרכזית של הגזרה מסומנת באמצעות x, ועלינו למצוא את גודלה.

נתון שרדיוס המעגל שווה ל-r, ולכן שטחו יהיה שווה ל- $\pi \cdot r^2$. כמו כן, נתון שרדיוס הגזרה שווה ל-3r, ושהזווית המרכזית שלה היא x. לכן שטחה של הגזרה יהיה $\pi \cdot (3r)^2 \cdot \frac{x}{360^\circ}$.

נותר לנו להשוות בין השטחים שמצאנו ולחלץ את x. נגלה כי $x = 40^\circ$

$$\left(\cancel{\pi} \cdot \cancel{r}^2 = \cancel{\pi} \cdot 9\cancel{r}^2 \cdot \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 1 = \frac{9x}{360^\circ} \Rightarrow 360^\circ = 9x \Rightarrow\right)$$

תשובה (4).

הסקה מתרשים (שאלות 9-13)

9. ידוע לנו שבשבוע כלשהו קיבל אחד המאבטחים שתי משמרות לילה, ושואלים מה **לא יכול להיות** מספר משמרות היום שקיבל באותו שבוע.

משמרת לילה מתוארת באמצעות סימן של ירח ומשמרת יום באמצעות סימן של שמש. המאבטח קיבל שתי משמרות לילה, ולכן עלינו להסתכל על הפלחים שמופיעים בהם שני ירחים, ולבדוק כמה שמשות מופיעות בכל אחד מהם. יש פלח אחד מתאים עם **5** שמשות, שני פלחים מתאימים עם **3** שמשות, ופלח אחד מתאים נוסף עם **4** שמשות. לכן, ייתכן ובאותו שבוע עבד המאבטח ב-**5**, **4** או **3** משמרות יום.
כלומר, **לא ייתכן** שלמאבטח יהיו רק **2** משמרות יום באותו שבוע.

תשובה (2).

---

10. נתון שדן היה אחראי שבועי בשבוע מסוים, ושואלים אותנו באיזה תפקיד **בהכרח לא** עבדה שיר באותו שבוע.

שיר נולדה בהפרש של שבוע מדן, ולכן ייתכן שנולדה באותו חודש בו נולד דן, חודש לפניו (אם נולד בתחילת החודש והיא קטנה ממנו) או חודש אחריו (אם נולד בסוף החודש והיא גדולה ממנו).

דן אחראי שבועי (מסומן באמצעות *****). כיוון שרק באחד הפלחים מופיעה ה-*****, ניתן לקבוע שזהו הפלח שהגריל דן. שיר נולדה באותו חודש שבו נולד דן או באחד מהחודשים הצמודים לו, ולכן בהכרח תגריל את אותו הפלח, או את אחד הפלחים הצמודים אליו.

מכאן שהיא יכולה הייתה לקבל תפקיד בכיתת הכוננות (מסומן באמצעות טלפון), לעבוד במשמרת יום (מסומן באמצעות שמש), להיות אחראי שבועי (מסומן באמצעות כוכבית) או לעבוד במשמרת לילה (מסומן באמצעות ירח).

כיוון שבאף אחד מהפלחים שיכלה להגריל שיר אין סימן של מכונית, סמל לתפקיד סיירת, הרי שהיא **לא** יכלה לעבוד בתפקיד זה.

תשובה (3).

---

11. עלינו למצוא את הסיכוי שאחת ממאבטחות המוזיאון **לא** תהיה בכיתת הכוננות **וגם לא** תהיה סיירת.

נבדוק בכמה מתוך 12 הפלחים **אין** סימן של מכונית (סיירת) **וגם אין** סימן של טלפון (כיתת כוננות).

יש בדיוק שני פלחים עם סימן של מכונית, ושני פלחים נוספים עם סימן של טלפון. בשאר **8** הפלחים אין סימן של מכונית או טלפון. הסיכוי שהמאבטחת תגריל את אחד מהפלחים האלו הוא $\frac{8}{12}$, ולאחר צמצום $\frac{2}{3}$.

תשובה (3).

---

12. נתון כי אחד המאבטחים קיבל בשבועיים 7 משמרות לילה בסך הכול, ושואלים אותנו מה ניתן לקבוע שהמאבטח עשה לפחות פעם אחת בשבועיים אלו.

תחילה נמצא אילו שני פלחים בתרשים מאפשרים יחד 7 משמרות לילה. יש פלח אחד בלבד עם 4 משמרות לילה, ושני פלחים נוספים עם 3 משמרות לילה כל אחד. בשאר הפלחים יש פחות מ-3 משמרות לילה, ולכן שתי האפשרויות היחידות ל-7 משמרות לילה סה״כ כוללות בוודאות את הפלח שבו מופיעות 4 משמרות לילה יחד עם אחד הפלחים ובו מופיעות 3 משמרות לילה.

על הפלח ובו **4** משמרות לילה מופיע הסימן ***** המתאר את תפקיד האחראי השבועי, ולכן נקבע כי המאבטח בוודאות היה אחראי שבועי במהלך אותם שבועיים.

תשובה (3).

---

13. נתון שבשבוע כלשהו יליד חודש מרץ היה חבר בכיתת כוננות, ושואלים אותנו מתי נולדו האחראים השבועיים באותו שבוע.

ישנם שני פלחים בלבד עליהם מסומנת כיתת כוננות, ולכן ילידי חודש מרץ בהכרח הגרילו אחד מהם. סימון האחראי השבועי מופיע בפלח העוקב לאחד משני הפלחים וארבעה פלחים לפני הפלח הנוסף.

כלומר, האחראים השבועיים יהיו ילידי החודש שאחרי מרץ, כלומר **אפריל**, או ילידי החודש שנמצא ארבעה חודשים לפני חודש מרץ, כלומר **נובמבר**.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 14-20)

14. שואלים אותנו כמה אחוזים מהווה x מ-b, אם ידוע ש- $b = \frac{x}{7}$.

דרך א': אלגברה

נפשט את המשוואה ונקבל $x = 7b$. כלומר, x גדול מ-b **פי** 7, ולכן הוא מהווה 700% ממנו.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

b הוא השלם. לכן, נציב במקומו 100 ונקבל ש-x שווה ל-700. שואלים אותנו כמה אחוזים מהווה 700 מ-100, והתשובה היא 700%.

תשובה (4).

---

15. נשאלנו איזו טענה נכונה בהכרח בנוגע ל-M, אם ידוע כי הוא שווה לממוצע של x ו-y שמכפלתם שווה ל-1, וש-x גדול מ-1.

M שווה לממוצע של x ו-y, כלומר לביטוי $\frac{x+y}{2}$. כיוון שידוע ש- $x \cdot y = 1$, נוכל לקבוע כי $y = \frac{1}{x}$ ולהציב אותו בביטוי $\frac{x+y}{2}$ כך שנקבל ש-M שווה ל- $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$.

כעת ננסה להגיע למסקנה בנוגע לגודלו של M. אם x היה שווה ל-1, הרי ש-M היה שווה ל- $1 \left(= \frac{2}{2} = \frac{1+\frac{1}{1}}{2} \right)$. כיוון ש-x גדול מ-1, הרי שהמונה של הביטוי בהכרח יהיה גדול יותר, ולכן חלוקתו ב-2 בהכרח תיתן תוצאה גדולה מ-1. אם כן, נקבע כי M בהכרח גדול מ-1.

תשובה (1).

---

16. נשאלנו איזו מהטענות נכונה **בהכרח** בנוגע ל-x ו-y (שניהם שלמים וגדולים מ-1), אם ידוע כי $y = \frac{a \cdot b}{x}$,

וכמו כן ידוע כי a ו-b הם מספרים ראשוניים, שונים זה מזה, הגדולים מ-10.

נעזר בדוגמה מספרית כדי לבדוק את הטענות שבתשובות. נניח ש-a שווה ל-11 ו-b שווה ל-13.

נקבל $y = \frac{11 \cdot 13}{x} \Rightarrow 11 \cdot 13 = x \cdot y \Rightarrow 143 = x \cdot y$. זוגות המספרים השלמים האפשריים בעבור x ו-y הם 1 ו-143, או 11 ו-13. מכיוון שנתון לנו ששניהם חייבים להיות גדולים מ-1 נקבע כי אחד מבין x ו-y חייב להיות שווה ל-11, והאחר חייב להיות שווה ל-13.

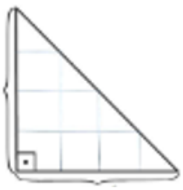
גם אם נציב מספרים ראשוניים אחרים במקום a ו-b, נגלה כי אחד מבין x ו-y חייב להיות שווה ל-a ואחד חייב להיות שווה ל-b. לכן הטענה ש-x ו-y הם מספרים ראשוניים נכונה בהכרח.

תשובה (1).

---

17. נשאלנו כמה ריבועים ששטח כל אחד מהם 1 סמ"ר ניתן להכניס בתוך משולש ישר זווית ושווה שוקיים שאורך כל אחד מהניצבים שלו 4 ס"מ.

אם שטחו של כל ריבוע שווה ל-1 סמ"ר, הרי שצלעו שווה ל-1 ס"מ. נצייר את הריבועים על המשולש ונראה כי ניתן להכניס לתוך המשולש 6 ריבועים שלמים.



תשובה (3).

---

18. שואלים אותנו כמה זמן (בקירוב) ייקח לחללית לטוס מרחק של 380,000 ק"מ במהירות של 100 קמ"ש.

נחלק את המרחק במהירות ונקבל שייקח לחללית $3,800 = \left(\frac{380,0\cancel{00}}{1\cancel{00}}\right)$ **שעות** לעבור את הדרך.

כיוון שהתשובות נתונות **בימים** או **שנים**, עלינו להמיר את הזמן ליחידות מתאימות. תחילה נמיר את ה**שעות** לימים.

בכל יום יש 24 שעות ולכן 3,800 **שעות** שווים לכ- $160 \left(\frac{3,800}{24} = \frac{38 \cdot 100}{24} = 38 \cdot \frac{100}{24} \simeq 38 \cdot 4 \simeq\right)$ **ימים**.

אין תשובה כזו, ולכן עלינו להמיר את הימים בשנים. בכל שנה יש 365 ימים ולכן 160 ימים שווים לכ- $\frac{1}{2} \left(\simeq \frac{160}{365}\right)$ **שנה**.

תשובה (1).

---

19. חילקו גליל שרדיוס בסיסו r וגובהו h לארבעה חלקים זהים, ושואלים אותנו מה **שטח הפנים** של כל אחד מהחלקים.

תחילה נבין ממה מורכב שטח הפנים של כל אחד מהחלקים. ניתן לראות כי הבסיס העליון והתחתון של כל אחד מהחלקים שווים לרבע מבסיס הגליל. כמו כן, ניתן לראות שהמעטפת של כל חלק מורכבת מרבע מהמעטפת של הגליל ומשני מלבנים. זוג צלעות של המלבן שווים לרדיוס בסיס הגליל, וזוג צלעות נוסף שווה לגובה הגליל.

נותר לנו לחשב את השטחים המרכיבים את שטח הפנים של כל חלק מהגליל, ולחבר ביניהם.

שטח הבסיס של הגליל שווה ל- πr^2. הבסיס העליון והתחתון של כל אחד מהחלקים שווים לרבע מבסיס הגליל, כלומר ל- $\frac{\pi r^2}{4}$, ויחד שטחי הבסיסים שווים ל- $\frac{\pi r^2}{2}$ $\left(2 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \right)$.

שטח המעטפת של הגליל שווה ל- $2\pi r \cdot h$, ולכן רבע ממנו יהיה שווה ל- $\frac{\pi r \cdot h}{2}$ $\left(\frac{2\pi r \cdot h}{4} = \right)$.

שטחו של כל מלבן שווה ל- rh, ולכן שטחם של שני המלבנים יחד יהיה שווה ל- $2rh$.

מכאן ששטח הפנים של כל אחד מהחלקים שווה ל- $2rh + \frac{\pi r \cdot h}{2} + \frac{\pi r^2}{2}$.

נפשט את הביטוי על ידי הוצאת גורם משותף משני האיברים הראשונים שלו ונקבל:

$$\left(\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r \cdot h}{2} + 2rh = \frac{\pi r}{2}(r+h) + 2rh = \right) \frac{\pi r(r+h)}{2} + 2rh$$

תשובה (2).

---

20. עלינו למצוא את הטווח המדויק של מספר המוזמנים למסיבה. כלומר, כמה מוזמנים **לכל היותר** ו**לכל הפחות** יהיו בה.

ניעזר בתשובות המוצעות ונבדוק אותן.

הערך **המינימלי** הקטן ביותר שמופיע בתשובות הוא 0, ולכן נבדוק אם הוא אפשרי. יכול להיות שאף אחד מעשרת החברים המשותפים של רותי ושלומית הוא לא חבר משותף של שלומית ותמר או רותי ותמר. הבנות רוצות להזמין רק חברים משותפים לשלושתן, ולכן לא יזמינו אף אחד למסיבה. כלומר, ייתכן ו-0 חברים יוזמנו למסיבה, ולכן תשובות (2) ו-(4) נפסלות.

כדי להכריע בין תשובות (1) ו-(3) עלינו להבין האם מספר החברים **המקסימלי** המשותף לשלושת הבנות הוא 10 או 20. מכיוון שלכל שתי בנות יש לכל היותר 10 חברים משותפים, הרי שלא ייתכן שלשלושתן יהיו יותר מ-10 חברים משותפים. כלומר, לא ייתכן שיהיו לשלושתן 20 חברים משותפים. מכאן שגם תשובה (3) נפסלת, ולכן התשובה הנכונה היא תשובה (1).

תשובה (1).
