הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-15)

1. עלינו לחשב את תוצאת התרגיל: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{1}{2}-\frac{7}{20}$.

לפי סדר פעולות חשבון יש לבצע פעולות כפל לפני פעולות של חיבור וחיסור. נקבל: $\frac{3}{20}+\frac{7}{10}+\frac{1}{2}-\frac{7}{20}$.

כדי שנוכל לחבר או לחסר בין שברים יש ליצור מכנה משותף ביניהם. נקבל: $\frac{3}{20}+\frac{14}{20}+\frac{10}{20}-\frac{7}{20}$.

כעת נחבר ונחסר מונים בהתאם לתרגיל, ולאחר צמצום נקבל 1 $\left(\frac{3+14+10-7}{20}=\frac{20}{20}=1\right)$.

תשובה (1).

---

2. מתוך שישה מספרים המופיעים על גבי הקובייה (1, 2, 3, 4, 5 ו-6) שלושה מהם קטנים או שווים ל-3 (1, 2 ו-3), ולכן הסיכוי לקבל מספר קטן או שווה ל-3 בהטלת קובייה בודדת שווה ל- $\left(\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\right)$.

כדי לחשב את הסיכוי שכמה מאורעות יתקיימו במקביל עלינו לכפול את הסיכויים של כל אחד מהם בנפרד.

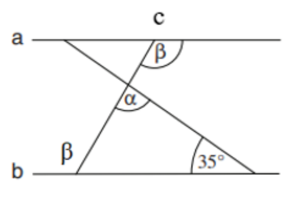
לפיכך, הסיכוי לקבל מספר קטן או שווה ל-3 בכל אחת משתי הטלות יהיה שווה ל- $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$, הסיכוי לקבל מספר קטן או שווה ל-3 בכל אחת משלוש הטלות יהיה שווה ל- $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$, וכך הלאה, כך שהסיכוי לקבל מספר קטן או שווה ל-3 בכל אחת מ-n הטלות יהיה שווה ל- $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

תשובה (2).

---

3. נתבקשנו להביע את גודלה של זווית β באמצעות זווית α, כלומר למצוא את הקשר ביניהן. לפיכך, ננסה לבנות משוואה הכוללת את β ו- α.

תחילה נשתמש בנתון לפיו הישרים a ו-b מקבילים. כאשר ישר חותך את שני המקבילים נוצרות זוויות מתאימות שוות זו לזו. נתון שהזווית שנוצרה בין הישר a לישר c שווה ל- β, ולכן נקבע כי גם הזווית שנוצרה בין הישר החותך c לישר b שווה ל- β (ראה סרטוט).



ידוע כי זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות במשולש שאינן סמוכות לה, ולכן זווית β (מהווה זווית חיצונית למשולש התחתון שבסרטוט) תהיה שווה ל- $\left(\alpha+35^\circ\right)$.

תשובה (1).

.4 עלינו לחשב בכמה נפשות גדולה אוכלוסיית עיר א מאוכלוסיית עיר ב כיום, אם ידוע שלפני 7 שנים הן היו זהות, ושבכל שנה גדלה אוכלוסיית עיר א ב-7,015 נפשות, ואוכלוסיית עיר ב ב-6,985 נפשות.

על פי הנתונים בכל שנה גדלה אוכלוסיית עיר א ב- $30\left(=7,015-6,985\right)$ נפשות יותר מאוכלוסיית עיר ב. לכן הפער בין גודל האוכלוסיות בתום 7 שנים יהיה $210\left(=7\cdot30\right)$ נפשות.

תשובה (2).

.5 נתבקשנו למצוא את היחס בין אורך הישר DG שבסרטוט לבין היקף המשושה המשוכלל.
נניח שכל אחת מצלעות המשושה שווה ל-a ס״מ, ולכן היקפו שווה ל-6a ס״מ.
מהכירותנו עם זוויות המשושה המשוכלל נוכל לקבוע כי משולש EGD שבסרטוט הוא משולש זהב.

במשולש זהב הניצב שמול הזווית שגודלה 30° שווה למחצית היתר. לכן, נוכל לקבוע כי GD המהווה ניצב מול הזווית שגודלה 30° במשולש EGD שווה למחצית מהיתר, כלומר מ-ED. לפיכך, DG תהיה שווה ל- $\frac{1}{2}a$ ס״מ.

מכאן שהיחס בין DG להיקף המשושה המשוכלל שווה ל- $\frac{1}{12}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{a}}{6\cancel{a}}$

תשובה (1).

.6 לפנינו ביטוי בנעלם אחד, ועלינו לפשט אותו.

דרך א׳: אלגברה

הביטוי מכיל שני שברים וביניהם פעולת חיבור. כדי לחבר ביניהם עלינו ליצור תחילה מכנה משותף.

נקבל: $\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}$.

ניתן לזהות בביטוי שקיבלנו את שלוש נוסחאות הכפל המקוצר, נפתח אותן ונכנס איברים. נקבל:

$$\frac{2x^2+2}{x^2-1}=\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

דרך ב׳: הצבת דוגמה מספרית מהראש ופסילת שלוש תשובות

נציב ש-x שווה ל-2 ונקבל שערכו של הביטוי הנתון שווה ל- $3\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{3}{1}=\frac{2-1}{2+1}+\frac{2+1}{2-1}$.

תשובות (1) ו-(2) שונות מ- $3\frac{1}{3}$ ולכן נפסלות. אם נציב בתשובה (4) ש-x שווה ל-2 נקבל גם כן תוצאה שונה מ- $3\frac{1}{3}$, ולכן גם היא נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (3).

.7 נתון שסדרה מחולקת לכמה עונות, ובכל אחת מהן 13 פרקים, ושואלים אותנו לאיזו עונה שייך הפרק ה-120 בסדרה.

נפתור את השאלה באמצעות ניסוי וטעייה. בתום העונה **העשירית** יוקרן הפרק ה- $130\left(=13\cdot10\right)$, ומכאן שבתום העונה **התשיעית** יוקרן הפרק ה- $117\left(=130-13\right)$. מכאן שהפרק ה-120 יוקרן במהלך העונה **העשירית**.

תשובה (2).

.8 עלינו למצוא כמה מחלקים **זוגיים** יש למספר 40 (לא כולל 40 עצמו).

מכיוון שמספר המחלקים הכולל של 40 קטן יחסית, נפרוט אותם באופן שיטתי ולאחר מכן נספור כמה מהם זוגיים.

זוגות המחלקים הם: 1 ו-40, 2 ו-20, 4 ו-10, 5 ו-8.

מתוכם יש 5 מחלקים זוגיים (מלבד 40 עצמו): 2, 20, 4, 10 ו-8.

תשובה (1).

.9 נתון שאבי וגיא שוטפים כל אחד בנפרד חדר מדרגות ב-3 שעות. הם שוטפים מדרגות **יחד** במשך שעה, ולאחר מכן ממשיך אבי לשטוף את המדרגות **לבדו** עד לסיום השטיפה. עלינו למצוא במשך כמה זמן שטף אבי את חדר המדרגות **לבדו**.

תחילה נחשב איזה חלק מהמדרגות נותר לאבי לשטוף **לבדו**. אבי וגיא שוטפים כל אחד בנפרד $\frac{1}{3}$ מחדר המדרגות בשעת עבודה, ולכן אם שטפו את חדר המדרגות **יחד** במשך שעה, נותר לאבי לשטוף $\frac{1}{3}\left(=1-2\cdot\frac{1}{3}\right)$ מחדר המדרגות.

הזמן שייקח לאבי לשטוף לבדו $\frac{1}{3}$ מחדר המדרגות הוא כאמור 1 שעה, ולכן נסמן את תשובה (1).

תשובה (1).

.10 נתון ש- $|x|\cdot(x-2)\le 0$ ושואלים אותנו מהו התחום המדויק בעבור x.

דרך א': הצבת דוגמה מספרית ופסילת שלוש תשובות.

תחילה נחפש ערך מתאים ל-x שמקיים את נתוני השאלה. ניתן לראות כי אם נציב $x=1$ בנתון נקבל פסוק אמת $-1\le 0$, ולכן 1 הוא ערך אפשרי בעבור x.

כעת ניגש לתשובות המוצעות. כיוון שהערך 1 לא נכלל באף אחד מהתחומים שבתשובות (1), (3) ו-(4) נוכל לקבוע שאף אחת מהן היא לא התחום המדויק בעבור x ולפסול אותן. נותרנו רק עם תשובה (2), ולכן היא בהכרח נכונה.

דרך ב': הבנה אלגברית

הביטוי $|x|$ בהכרח חיובי או שווה ל-0. לכן, על מנת שמכפלתו בביטוי $(x-2)$ תיתן תוצאה שלילית או שווה ל-0, על הביטוי $(x-2)$ להיות שלילי או שווה ל-0.

הסקנו ש- $x-2\le 0$, ולאחר העברת אגפים נקבל $x\le 2$.

תשובה (2).

---

11. נתון חרוט שרדיוס בסיסו OB שווה ל-1 ס"מ. כמו כן, נתון שאורך הישר AB שווה להיקף בסיס החרוט, כלומר ל- $2\pi\left(=2\pi\cdot1=2\pi\cdot r\right)$, ושואלים אותנו מה אורכו של הישר AO המהווה גובה בחרוט.

כיוון שהמשולש AOB שבסרטוט הוא משולש ישר זווית (הגובה AO יוצר זווית של 90° מעלות עם OB, רדיוס הבסיס של החרוט), נוכל להציב את הנתונים בנוסחת פיתגורס ולחלץ את AO.

לאחר שנציב את הנתונים בנוסחת פיתגורס נקבל: $1^2+AO^2=\left(2\pi\right)^2$.

נותר לנו לבודד את AO ולקבל: $AO=\sqrt{4\pi^2-1}\left(\Leftarrow AO^2=4\pi^2-1\right)$

תשובה (1).

---

12. נתון ששטחו של המשולש הלבן שבסרטוט DEC הוא x סמ"ר, ומבקשים שנמצא את גודלו של **השטח האפור** שבסרטוט.

השטח האפור שווה להפרש בין שטח משולש ABC לשטח משולש DEC. כיוון ששטח משולש DEC כבר נתון לנו, נתמקד בלמצוא את שטח משולש ABC.

כיוון ש-DE מקביל לצלע AB במשולש ABC, נסיק כי המשולשים ABC ו-DEC הם משולשים **דומים**.

ידוע כי כאשר מתקיים דמיון בין צורות, יחס השטחים שלהם שווה לריבוע של היחס הקווי שלהם.

כיוון שנתון לנו שהיחס בין צלע AC במשולש ABC לבין הצלע המתאימה לה DC במשולש DEC הוא 3:1, נסיק כי יחס שטחי המשולשים הוא $9:1\left(\Leftarrow 3^2:1^2\right)$.

מכאן שאם שטח משולש DEC הוא x סמ"ר, הרי ששטח משולש ABC צריך להיות שווה ל-9x סמ"ר.

לפיכך, השטח האפור שווה ל- $8x\left(=9x-x\right)$ סמ"ר.

תשובה (3).

---

13. נתון משולש ישר זווית ושווה שוקיים שאורך כל אחד מהניצבים שלו הוא 1 ס"מ, ומכאן שאורך היתר שלו (הישר AC) שווה ל- $\sqrt{2}\left(=\sqrt{2}\cdot1\right)$ס"מ. נקודה P מחלקת את AC לקטעים CP ו-AP, ומבקשים שנמצא את אורכו של AP. נמצא את היחס בין CP ו-AP, ונחלק את AC לפי יחס זה.

נתון שהישר BP מחלק את שטח משולש ABC לשני משולשים PBC ו-BPA כך ששטחו של משולש PBC מהווה $\frac{2}{3}$ משטח משולש ABC. לפיכך, היחס בין שטחי המשולשים PBC ו-BPA הוא $2:1\left(=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}\right)$.

שטח משולש PBC שווה למחצית ממכפלת CP בגובה ל-CP, ושטח משולש BPA שווה למחצית ממכפלת AP בגובה ל-AP. מכיוון של-CP ו-AP גובה זהה, נסיק כי אם שטח משולש PBC גדול פי 2 משטח משולש BPA אזי PC גדול פי 2 מ-AP.

נותר לנו לחלק את AC ביחס של 2:1 ונקבל כי אורכו של AP הוא $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\right)$ ס"מ, ואורכו של CP הוא $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\right)$ ס"מ.

תשובה (4).

14. נתונה פעולה חדשה לפיה $\$(x)=16x+16x+16x+.....$, כאשר x קובע בנוסף את מספר הפעמים שיש להוסיף 16x כחלק מהפעולה, ומבקשים שנמצא את תוצאת הפעולה אם נחליף את x ב-a.

נעזר בהצבה של דוגמאות מספריות מהראש כדי לפתור את השאלה.

תחילה נניח ש-a שווה ל-2. במקרה זה תוצאת הפעולה תהיה $16\cdot 2^2$.
$\left(\$(2)=16\cdot 2+16\cdot 2=2\cdot 16\cdot 2=\right)$. אם נציב $a=2$ גם בתשובות, נראה שתשובות (3) ו-(4) נותנות תוצאה שונה מ- $16\cdot 2^2$, ולכן הן נפסלות.

נשארנו עם תשובות (1) ו-(2). כדי להכריע ביניהן נאלץ להציב מספר נוסף, נניח $a=3$.

במקרה זה תוצאת הפעולה תהיה: $16\cdot 3^2\left(\$(3)=16\cdot 3+16\cdot 3+16\cdot 3=3\cdot 16\cdot 3=\right)$.

אם נציב $a=3$ גם בתשובות, נראה שתשובה (1) נותנת תוצאה שונה מ- $16\cdot 3^2$, ולכן גם היא נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (2).

---

15. נתבקשנו להביע את מחירו של לחם באמצעות הנעלמים k, m ו-n.

נפתור את השאלה באמצעות הבנה אלגברית.

נתון שמחירם של לחם, חלב וקוטג' שווה ל-k שקלים, ושמחירם של לחם וקוטג' (ללא חלב) הוא m שקלים, ולפיכך מחיר החלב יהיה שווה להפרש ביניהם, כלומר ל- $(k-m)$ שקלים.

כיוון שידוע שמחיר לחם וחלב הוא n שקלים, נוכל לחסר ממנו את מחיר החלב שמצאנו, כלומר $(k-m)$ שקלים, ונקבל את מחיר הלחם שיהיה שווה ל- $n+m-k$ $\left(n-(k-m)=n-k+m\right)$ שקלים.

תשובה (4).

הסקה מתרשים (שאלות 16-20)

16. מבין התשובות המוצעות, עלינו לבחור היכן יהיה הסיכוי **הגבוה** ביותר למצוא שזיף ש**אינו** נגוע בבחירה מתוך השזיפים מזן מסוים בחלקה מסוימת.

נזכור כי המספרים בטבלה מייצגים את אחוז השזיפים **הנגועים** מזן מסוים בחלקה מסוימת, ולכן הסיכוי **הגבוה** ביותר למצוא שזיף ש**אינו נגוע** יהיה היכן שאחוז השזיפים הנגועים הוא **הנמוך ביותר**.

נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: זן A בחלקה ז. 5% סיכוי לשזיף נגוע. כלומר **95% סיכוי לשזיף לא נגוע**.

<u>תשובה (2)</u>: זן B בחלקה ד. 25% סיכוי לשזיף נגוע. כלומר 75% סיכוי לשזיף לא נגוע.

<u>תשובה (3)</u>: זן C בחלקה ה. 50% סיכוי לשזיף נגוע. כלומר 50% סיכוי לשזיף לא נגוע.

<u>תשובה (4)</u>: זן D בחלקה ו. 15% סיכוי לשזיף נגוע. כלומר 85% סיכוי לשזיף לא נגוע.

תשובה (1).

---

17. נתון שבסוף שנת 2020 הניבו עצי השזיף בחלקה **ה** בסך הכול 600 שזיפים מזן מסוים.
כמו כן, נתון ש-400 מתוכם היו נגועים, ושואלים באיזה זן שזיפים מדובר.

400 שזיפים נגועים מתוך 600 שזיפים הם $66\frac{2}{3}\%$ $\left(\frac{400}{600}\cdot 100 = 66\frac{2}{3}\right)$ מאותם שזיפים. נסתכל בטבלה על הטור המייצג את חלקה **ה** ונמצא בו זן שזיפים שאחוז השזיפים הנגועים מסוג זה שווה ל- $66\frac{2}{3}\%$.

זהו זן שזיפים B, ולכן נסמן את תשובה (2).

תשובה (2).

---

18. שואלים אותנו באיזו מהשנים שבתשובות יכולה הייתה נעמה להתחיל לעבוד במטע, אם ידוע שעבדה בו במשך 7 שנים רצופות בהן השתתפה בנטיעת עציהן של 3 מהחלקות.

נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 1992. אם נטע החלה לעבוד במטע בשנת 1992, ועבדה בו במשך 7 שנים רצופות, היא סיימה את עבודתה במטע בשנת 1999. נבדוק בטבלה אילו נטיעות התקיימו במהלך אותן שנים, ונראה כי באותן שנים ניטעו 3 חלקות: חלקה א בשנת 1993, חלקה ב בשנת 1995, וחלקה ג בשנת 1998. מכאן שזו התשובה הנכונה.

אין צורך לבדוק תשובות נוספות, אך נעשה זאת לצורך שלמות ההסבר.

<u>תשובה (2)</u>: אם נטע החלה לעבוד במטע בשנת 1994, ועבדה בו במשך 7 שנים רצופות, היא סיימה את עבודתה במטע בשנת 2001. במהלך שנים אלו היו רק שתי נטיעות (ב-1995 וב-1998), ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: אם נטע החלה לעבוד במטע בשנת 1997, ועבדה בו במשך 7 שנים רצופות, היא סיימה את עבודתה במטע בשנת 2004. במהלך שנים אלו הייתה רק נטיעה אחת (ב-1998), ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: אם נטע החלה לעבוד במטע בשנת 2003, ועבדה בו במשך 7 שנים רצופות, היא סיימה את עבודתה במטע בשנת 2010. במהלך שנים אלו היו רק שתי נטיעות (ב-2005 וב-2008), ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

19. עלינו למצוא מה היחס בין מספר הפירות הנגועים לבין מספר הפירות שאינם נגועים בנוגע לשזיפים מזן C בחלקה **ג**.

ניתן לראות כי $66\frac{2}{3}\%$ (שהם $\frac{2}{3}$) מבין הפירות מזן C בחלקה ג, נגועים. כלומר, $\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}=\right)$ מהפירות מזן C בחלקה ג אינם נגועים. אם כן, היחס בין השזיפים הנגועים למספר השזיפים שאינם נגועים מזן C בחלקה ג הוא: $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$. נרחיב את שני צדי היחס פי 3 ונקבל: $2:1$.

תשובה (2).

---

20. שואלים אותנו איזה חלק מבין עצי השזיף שנמצאים במטע בסוף שנת 2020 נשתלו לפני למעלה מ-20 שנה.

כדי לענות על השאלה עלינו למצוא כמה עצים היו במטע בסוף שנת 2020, וכמה מהם נשתלו לפני למעלה מ-20 שנה.

תחילה נחשב כמה עצים היו במטע בסוף שנת 2020.

כל העצים בחלקות המופיעות בטבלה נשתלו לפני שנה זו (החלקה האחרונה נשתלה בשנת 2017), ולכן נתייחס לכולן.

סד טורי העצים הכולל בכל החלקות שווה ל- $30\left(=2+4+5+4+7+3+5\right)$, ונתון שבכל טור יש 4 עצים. כלומר, בסוף שנת 2020 יש במטע $120\left(=4\cdot 30\right)$ עצים.

כעת נחשב כמה מהעצים מבוגרים מ-20 שנה, כלומר כמה מהם נשתלו לפני שנת 2000. החלקות הרלוונטיות הן א, ב ו-ג. סך טורי העצים הכולל בחלקות אלו שווה ל- $15\left(=7+3+5\right)$, ונתון שבכל טור יש 4 עצים. כלומר, בסוף שנת 2020 יש במטע $60\left(=4\cdot 15\right)$ עצים בני יותר ב-20 שנה.

לפיכך, $\frac{1}{2}\left(=\frac{60}{120}\right)$ מהעצים שנמצאים במטע בסוף שנת 2020 נשתלו לפני למעלה מ-20 שנה.

תשובה (2).