הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. בשאלה נתונים שני זוגות של צלעות מקבילות. הישרים יוצרים מרובע מסוים ושואלים אותנו על סכום זוג זוויות צמודות בו.

נבין באיזה מרובע מדובר ואז ננסה להסיק על זוויותיו. מכיוון שמדובר בשני זוגות של קווים מקבילים, הרי שהמרובע שנוצר הוא לכל הפחות מקבילית. אחת מהתכונות של המקבילית היא שכל זוג זוויות סמוכות בה בהכרח שווה ל- 180°, ולכן התשובה הנכונה היא (3).

תשובה (3).

---

2. עלינו למצוא את צלע BD המהווה יתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים BAD. לכן, ננסה למצוא את אחד מהניצבים שלו וניעזר ביחס הצלעות המוכר במשולשים מסוג זה $\left(1:1:\sqrt{2}\right)$. כיוון ש-AB מהווה גם ניצב במשולש נוסף (ABC) לגביו יש לנו נתונים ממשיים, ננסה להגיע אליו דרך משולש זה.

נסתכל על משולש ABC. משולש זה הוא משולש ישר זווית שאחד הניצבים שלו הוא 3 והיתר שלו שווה ל-5. לכן, לפי השלשה הפיתגורית המוכרת, הניצב הנוסף במשולש (AB) שווה ל-4.

אם כן, כדי להגיע אל היתר במשולש BAD נכפול את AB פי $\sqrt{2}$ ונקבל כי BD שווה ל- $4\sqrt{2}$.

כיוון ש-BD מופיע בתשובות בצורה שונה, נשתמש בחוקי שורשים ונפשט את הביטוי:

$$4\sqrt{2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{32}$$

תשובה (3).

---

3. נתונה משוואה בנעלם אחד $\left(x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^4=27$, ומבקשים מאתנו למצוא את ערכו.

נבודד אותו באמצעות חוקי אלגברה. נתחיל כמובן מאגף שמאל של המשוואה, בו הוא נמצא.
כאשר יש לנו מכפלת שני מספרים שמועלים בחזקה מסוימת נוכל להעלות כל מספר במכפלה הנתונה באותה חזקה בנפרד. נקבל: $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4=27$.

נמשיך לפשט את אגף שמאל של המשוואה. כאשר מעלים חזקה בחזקה, מקבלים חזקה עם אותו בסיס, בעלת מעריך השווה למכפלת שני המעריכים. נקבל: $x^{\frac{1}{4}\cdot 4}\cdot x^{\frac{1}{2}\cdot 4}=27 \Leftarrow x^1\cdot x^2=27$.

נמשיך לפשט את אגף שמאל של המשוואה. כאשר כופלים שתי חזקות בעלות בסיס שווה, מקבלים חזקה בעלת אותו בסיס ומעריך השווה לסכום המעריכים של החזקות שכופלים. נקבל
$x^{1+2}=27 \Leftarrow x^3=27$.
כעת נותר לנו להוציא שורש שלישי משני אגפי המשווה על מנת לחלץ את x. נקבל:
$\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{27} \Leftarrow x=3$

תשובה (3).

---

4. לפנינו שאלת יחסים. נתונים לנו יחסי מספרי הגולות של שלושה ילדים, וכמו כן נתון לנו גודל ממשי לפיו שההפרש שבין מספר הגולות של רוני ושל בועז גדול ב-15 מההפרש שבין מספר הגולות של בועז ושל אלדד. שואלים אותנו כמה גולות יש לשלשתם יחד. מכיוון שמלבד היחס יש גם גודל ממשי, נפתור את השאלה בצורה אלגברית. מכיוון שלאלדד יש את מספר הגולות הקטן ביותר נגדיר אותו באמצעות x. לבועז יש פי 2 גולות מאלדד, כלומר $2x$, ולרוני פי 3 גולות מבועז, כלומר $6x$. מכאן שלכל השלושה יחד יש $9x\ (= x + 2x + 6x)$ גולות.

שימו לב: גילינו שמספר הגולות הכולל הוא שלם המתחלק ב-9. לכן ניתן לקבוע כבר בשלב זה שתשובות (1), (2) ו-(4), שאף אחת מהן אינה מתחלקת ב-4 בהכרח **אינן** נכונות, ולסמן את תשובה (3).

לצורך שלמות ההסבר נראה כיצד בכל זאת ניתן להגיע אליה. ההפרש בין מספר הגולות של רוני ובועז הוא $4x\ (= 6x - 2x)$ וההפרש בין מספר הגולות של בועז ואלדד הוא $x\ (= 2x - x)$. ידוע כי ההפרש בין הפרשי הגולות הוא 15, ולכן נשתמש בכלל "תן למסכן" ונבנה את המשוואה" $x + 15 = 4x$. נחלץ את x ונגלה כי הוא שווה ל-5 $\Rightarrow 15 = 3x$.

סך כל הגולות של השלושה שווה ל-$9x$, כלומר ל-45 $(= 9 \cdot 5)$

תשובה (3).

---

5. נתונה קוביה הוגנת שכל פאה שלה צבועה באחד משלשה צבעים: אדום, ירוק וכחול, ואנו צריכים לחשב מה הסיכוי שבהטלת הקוביה היא תיפול על פאה כחולה. כלומר, עלינו למצוא כמה מתוך 6 פאות הקוביה צבועות בכחול.

מהנתון לפיו הסיכוי שהקובייה תיפול על פאה אדומה **כפול מ**הסיכוי שתיפול על פאה ירוקה, נסיק כי יש פי 2 פאות אדומות מאשר ירוקות. כלומר, אם יש פאה אחת ירוקה יהיו שתי פאות אדומות, ואז יוותרו שלוש פאות כחולות, ואם יש שתי פאות ירוקות, יהיו ארבע פאות אדומות, ואז לא יהיו פאות כחולות בכלל. מכיוון שנתון שיש לפחות פאה אחת בכל צבע, נקבע כי לקוביה יש פאה אחת ירוקה, שתיים אדומות ושלוש כחולות.

מכאן שהסיכוי שבהטלת הקוביה היא תיפול על פאה כחולה הוא $\frac{1}{2}\left(= \frac{3}{6}\right)$

תשובה (2).

---

6. נתונות אי-שוויון בשני נעלמים: $0 < (x - y)$, ומבקשים מאיתנו לקבוע איזו מהטענות שבתשובות **בהכרח** נכונה. נבדוק את הטענות שבתשובות:

<u>תשובה (1)</u>: $(y - x)$ שלילי. $(x - y)$ ו-$(y - x)$ הם מספרים נגדיים, ולכן אם נתון לנו ש-$(x - y)$ הוא מספר חיובי, נקבע כי $(y - x)$ הוא **בהכרח** שלילי. זו התשובה הנכונה.

לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם את שאר התשובות ונפסול אותן. ניתן לעשות זאת בקלות גם באמצעות הצבת דוגמאות מספריות:

<u>תשובה (2)</u>: $(y - x)$ חיובי. ראינו כי $(y - x)$ הוא **בהכרח** שלילי. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $(x + y)$ שלילי. x יכול להיות 4 ו-y יכול להיות 2. נקבל ש- $x + y = 6$. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $(x + y)$ חיובי. x יכול להיות (-2) ו-y יכול להיות (-4). נקבל ש- $x + y = -6$. התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

7. נתון כי x אחוזים מ-60 הם 4 אחוזים מ-y, ושואלים אותנו על ערכו המספרי של הביטוי $\frac{x}{y}$.

מכיוון שלא מדובר בבעיה מילולית נפתור את השאלה בצורה אלגברית באמצעות שימוש בנוסחת האחוזים.

x אחוזים מ-60 הם: $60 \cdot \frac{x}{100}$, ו-4 אחוזים מ-y הם: $y \cdot \frac{4}{100}$.

מכיוון שהם שווים זה לזה, נבנה את המשוואה הבאה: $y \cdot \frac{4}{100} = 60 \cdot \frac{x}{100}$.

נכפול את שני צדי המשוואה ב-100 ונקבל: $60x = 4y$.

נחלק את שני צדי המשוואה ב-y וב-60 ונקבל: $\frac{4}{60} = \frac{x}{y} \Leftarrow \frac{1}{15} = \frac{x}{y}$

תשובה (1).

---

8. לפנינו בעיית תנועה. נתון לנו שנורית ויעל יצאו משתי קצוות של כביש באותו זמן, זו לקראת זו, עד שנפגשו, ושנורית מהירה מיעל פי $\frac{3}{2}$. כמו כן, נתון שנורית עברה עד המפגש 60 ק"מ. שואלים אותנו מהו המרחק המשותף שעברו השתיים. מכיוון שזמן התנועה של שתי הבנות זהה, יחס המהירויות שלהן שווה ליחס הדרכים שעברו. מכאן שאם נורית מהירה פי $\frac{3}{2}$ מיעל, היא עברה פי $\frac{3}{2}$ דרך ממנה. כלומר, יעל עברה $\frac{2}{3}$ מהדרך שעברה נורית, שהם $40 \left(= \frac{2}{3} \cdot 60\right)$ ק"מ. אם כן, אורכו של הכביש הוא $100 (= 60 + 40)$ ק"מ.

הערה: מכיוון שהמספרים שבתשובות נוחים, ניתן היה לפתור את השאלה גם באמצעות בדיקת תשובות.

<u>תשובה (2)</u>: אם נורית עברה 60 ק"מ עד המפגש, הרי שיעל עברה את $40 (= 100 - 60)$ הק"מ הנותרים. נורית מהירה מיעל פי $\frac{3}{2}$ ולכן אמורה לעבור פי $\frac{3}{2}$ דרך באותו הזמן. $\frac{60}{40}$ הם אכן $\frac{3}{2}$. מתאים.

תשובה (2).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. נשאלנו באיזו שנה **אחוז** ההכנסות מריבית, **מתוך כלל ההכנסות**, היה הגבוה ביותר. כלומר, באיזו מהשנים החלק של ההכנסות מריבית מתוך סך ההכנסות הכולל (מכירות + ריבית) הוא הגדול ביותר.
נבדוק זאת בעבור כל אחת מהשנים המופיעות בתשובות:

<u>תשובה (1)</u>: 2015. $\frac{35}{135} = \frac{35}{100+35}$

<u>תשובה (2)</u>: 2016. $\frac{10}{130} = \frac{10}{120+10}$

<u>תשובה (3)</u>: 2018. $\frac{10}{125} = \frac{10}{115+10}$

<u>תשובה (4)</u>: 2019. $\frac{20}{150} = \frac{20}{130+20}$

כעת נותר לנו להשוות בין השברים שהתקבלו ולמצוא את השבר הגדול ביותר.
לתשובות (2) ו-(3) יש מונה משותף. כיוון שלשבר שבתשובה (3) יש מכנה קטן יותר, הוא בהכרח גדול יותר. תשובה (2) נפסלת.
אם נשווה בין תשובות (1) ו-(4) נראה כי לשבר שבתשובה (1) יש מונה גדול יותר ומכנה קטן יותר מהשבר שבתשובה (4), ולכן הוא בהכרח גדול ממנו. תשובה (4) נפסלת.

נותר לנו להשוות בין תשובות (1) ו-(3). תשובה (1) שווה בקירוב ל- $\frac{1}{4}$ ותשובה (3) שווה בקירוב ל- $\frac{1}{12}$.

זה מספיק כדי לקבוע שתשובה (1) גדולה יותר.

תשובה (1).

---

10. נתון שבשנת 2015 חלה טעות ברישום הנתונים, ויש למחוק את כל ההשקעות הנוספות וההכנסות מריבית, ושואלים אותנו מה הרווח האמיתי של החברה לאחר השינוי. נחשב את הרווח:

הכנסות החברה ממכירות: 100

הוצאות שכר כולל: 60

הוצאות ציוד וחומרים: 50

הרווח, ששווה להכנסות בניכוי הוצאות שווה ל- -10 $(100-60-50=)$. כלומר, להפסד של 10.

תשובה (2).

---

11. שואלים אותנו איזה מהמשתנים שבתשובות הוא המתואם ביותר עם רווח החברה. כלומר, מתי המשתנה שתשובות עולה כאשר הרווח עולה, ולהפך, מתי הוא יורד כאשר הרווח יורד. נבין כיצד מתנהג הרווח ואז ניגש לתשובות למצוא משתנה שמתנהג באותו אופן.
הרווח נותר זהה בשנים 2015 ו-2016, עולה בשנת 2017 , יורד בשנת 2018, ולאחר מכן יורד שוב בשנת 2019. כעת נבדוק את המשתנים שבתשובות:

תשובה (1): מספר העובדים **עולה** בין השנים 2015 ו-2016. לכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): ניתן לראות כי השכר הכולל נותר זהה בין השנים 2015 ו-2016, עולה בשנת 2017 , יורד בשנת 2018, ולאחר מכן יורד שוב בשנת 2019. זו התשובה הנכונה.

לצורך שלמות ההסבר נבדוק את שאר התשובות ונפסול אותן:

תשובה (3): ניתן לראות כי ההוצאות על ציוד וחומרים **יורדות** בין השנים 2015 ו-2016. לכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): ניתן לראות כי ההכנסות ממכירות **עולות** בין השנים 2015 ו-2016. לכן התשובה נפסלת.

תשובה (2).

---

12. שואלים אותנו מה מספר העובדים ששכרם הכולל שווה לשכר על הוצאות הציוד והחומרים בשנת 2016, כלומר ל-40 מיליוני שקלים.

בשנת 2016 היו בחברה 600 עובדים ששכרם הכולל 60 מיליוני שקלים. 40 מיליוני שקלים מהווים $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{40}{60}=\right)$ משכרם של כלל העובדים, ולכן הם שווים ל- $\frac{2}{3}$ מכמות העובדים בחברה. כלומר ל- 400 $\left(\frac{2}{3}\cdot 600=\right)$ עובדים.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. נתון ביטוי מספרי הכולל פעולת חילוק בין מכפלות של מספרים שלמים, גדולים יחסית, ומבקשים מאתנו לבצע את פעולת החילוק. כיוון שקשה לצמצם מספרים גדולים, נפרק אותם לגורמים ראשוניים, ורק אז נצמצם. נעשה זאת באופן הבא:

$$\frac{84\cdot 225}{15\cdot 90}=\frac{(2\cdot 42)\cdot(25\cdot 9)}{(5\cdot 3)\cdot(9\cdot 10)}=\frac{(2\cdot 2\cdot 3\cdot 7)\cdot(5\cdot 5\cdot 3\cdot 3)}{(5\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 2\cdot 5)}=\frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{5}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{5}}=2\cdot 7=14$$

תשובה (1).

---

14. נתונה משוואה בשלושה נעלמים חיוביים לפיה: $\frac{z}{x+y}=\frac{x-y}{z}$, ומבקשים מאתנו להביע את x באמצעות y ו-z. נבודד את x באמצעות חוקי אלגברה באופן הבא:

נבצע כפל בהצלבה ונקבל: $(x-y)(x+y)=z^2$.

נטפל באגף שמאל של המשוואה באמצעות נוסחת הכפל המקוצר השלישית ונקבל: $x^2-y^2=z^2$.

נעביר את y^2 אגף כדי לבודד את x ונקבל: $x^2=y^2+z^2$.

מכיוון שקיבלנו באגף שמאל את x^2 ושואלים אותנו על x, עלינו להוציא שורש משני האגפים. נקבל:

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{y^2+z^2} \Leftarrow x=\sqrt{y^2+z^2}$$

תשובה (4).

---

15. נתון לנו שכל 6 קילומטרים מיוצגים במפה באמצעות 20 ס״מ, ושואלים אותנו מה היחס בין המרחק במפה למרחק במציאות. מכיוון שחלק מהנתונים בשאלה מופיעים ביחידות מידה של קילומטרים, וחלק ביחידות מידה של ס״מ, עלינו להמיר את כל הנתונים ליחידת מידה זהה. כל קילומטר שווה ל-1,000 מטרים, ולכן 6 קילומטרים שווים ל-6,000 מטרים. כיוון שבכל 1 מטר יש 100 ס״מ, הרי ש-6,000 מטרים שווים ל-600,000 ס״מ. אם כן, היחס בין המרחק במפה למרחק במציאות הוא 20:600,00.

כדי למצוא את היחס המצומצם כפי שהוא מופיע בתשובות, עלינו לחלק את שני צדי היחס ב-20 . נקבל שהיחס הוא 1:30,000.

תשובה (1).

---

16. נתון גליל שרדיוס הבסיס שלו שווה ל-r וגובהו שווה ל-h, ותיבה ששטח הבסיס שלה שווה לשטח המעטפת של הגליל וגובהה שווה ל-r, ושואלים אותנו מה היחס בין נפח הגליל לנפח התיבה.

ראשית נמצא את נפח הגליל ואת נפח התיבה. אנחנו יודעים כי הגליל שווה לשטח הבסיס שלו כפול גובהו, כלומר ל- $\pi r^2\cdot h$.

כדי לחשב את נפח התיבה עלינו לחשב קודם את שטח המעטפת של הגליל, שכידוע שווה להיקף הבסיס שלו כפול גובהו, כלומר ל- $2\pi r\cdot h$. נפח התיבה שווה לשטח בסיסה כפול הגובה שלה, כלומר ל- $2\pi r\cdot h\cdot r$

כעת נותר לנו לחשב את היחס בין נפח הגליל לנפח התיבה:

$$\frac{\cancel{\pi}\cdot\cancel{r}^2\cdot\cancel{h}}{2\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{r}\cdot\cancel{h}\cdot\cancel{r}}=\frac{1}{2}$$

תשובה (2).

---

17. לפנינו תרגיל כפל אותיות. האותיות A ו-B מייצגות ספרות עוקבות ($B=A+1$), ושואלים אותנו מה ערכו המספרי של הביטוי $A\cdot B$. נפתור את השאלה על ידי ניסוי וטעייה. נסתכל קודם על טור האחדות. A היא ספרה משמרת ולכן היא יכולה לקבל רק את אחד מהמספרים 1, 5 ו-6.

נבדוק קודם מה קורה כש-A שווה ל-1. B, הגדול ממנו ב-1, יהיה שווה ל-2.

אם נציב אותם בתרגיל נקבל: $111\cdot 11=1,221$. קיבלנו פסוק אמת ולכן אלו המספרים המתאימים.

מכאן ש- $A\cdot B$ שווה ל-2 $(1\cdot 2=)$

תשובה (2).

---

18. נתון רצף של מספרים עוקבים, מ- (-3) עד 3. מיכל מוחקת רצף של לפחות שני מספרים צמודים, ושואלים אותנו מה **אינו** יכול להיות סכום המספרים שמחקה.

נבדוק את התשובות המוצעות באופן הבא: בכל פעם ננסה למצוא רצף מספרים שסכומם שווה למספר שבתשובה, ואם נמצא רצף שכזה נפסול אותה.

<u>תשובה (1)</u>: 0. סכום המספרים 1-, 0, ו-1 שווה ל-0. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 2. סכום המספרים 1-, 0, 1 ו-2 שווה ל-2. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 5. סכום המספרים 1-, 0, 1, 2 ו-3 שווה ל-5. התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן תשובה (4) בהכרח נכונה.

תשובה (4).

---

19. נתונה מקבילית ABCD ושואלים אותנו על היחס בין שני ישרים המרכיבים את אחת מצלעותיה BE ו-EC. מכיוון שנתוני השאלה עוסקים ביחס שטחים של חלקים שונים המרכיבים את שטח המקבילית ננסה לפרק אותה לצורות שוות בשטחן.

ראשית נעביר ישר מקביל ל-BA היוצא מנקודה E לעבר נקודה F כלשהי, הנמצאת על צלע AD. נקבל מקבילית ABEF. AE מהווה אלכסון במקבילית זו ולכן הוא חוצה את שטחה לשני חלקים שווים, כלומר שטחו של משולש ABE שווה לשטחו של משולש AEF.

כעת נניח כי שטחו של משולש ABE שווה ל-1 סמ״ר. נתון ששטח הטרפז AECD גדול ממנו פי 3 ולכן יהיה שווה ל-3 סמ״ר. שטח הטרפז מורכב ממשולש AEF ומשטח מקבילית EFDC. כיוון ששטח משולש AEF שווה לשטח משולש ABE, כלומר ל-1 סמ״ר, נסיק כי שטח מקבילית EFDC הוא 2 סמ״ר.

קיבלנו שתי מקביליות ABEF ו-EFDC שהיחס בין שטחיהן הוא 1:2. כיוון שלמקביליות יש גובה זהה, נוכל לקבוע כי גם היחס בין בסיסי המקביליות הוא 1:2.

כלומר, היחס בין BE ל-EC הוא 1:2.

תשובה (2).

---

20. נתון משולש שווה שוקיים שזווית הראש שלו שווה ל- α וכל זוויותיה הם מספרים שלמים. שואלים אותנו מה הערך המינימלי ומה הערך המקסימלי של α.

מכיוון שבתשובות מופיעים רק שני ערכי מינימום ורק שני ערכי מקסימום אפשריים בעבור α נבדוק אותם.

נתונים רק שני ערכים מינימליים אפשריים עבור α: 2° או 46°. נתחיל מהתשובה הקטנה יותר ונבדוק האם α יכולה להיות שווה ל- 2°. במקרה זה שתי זוויות הבסיס יחד יהיו שוות ל- $178^\circ = (180^\circ - 2^\circ)$, כלומר, כל אחת מהן תהיה שווה ל- $89^\circ = \left(\frac{178^\circ}{2}\right)$. זוויות הראש הם מספרים שלמים בהתאם לנתוני השאלה, ולכן הערך המינימלי יכול להיות 2°. תשובות (3) ו-(4) נפסלות.

כדי להכריע בין תשובות (1) ו-(2) נבדוק האם ערכה המקסימלי של α יכול להיות 88°. במקרה זה שתי זוויות הבסיס יחד יהיו שוות ל- $92^\circ = (180^\circ - 88^\circ)$, כלומר, כל אחת מהן תהיה שווה ל- $46^\circ = \left(\frac{92^\circ}{2}\right)$. זוויות הראש הם מספרים שלמים בהתאם לנתוני השאלה, ולכן הערך המקסימלי יכול להיות 88°.

תשובה (2).
