הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. לפנינו שאלת יחסים. נתון כי סבתא חילקה עוגיות בין שלשת נכדיה כך שהבכור קיבל **פי** 2 עוגיות מהאמצעי, והאמצעי קיבל **פי** 2 עוגיות מהצעיר, ושואלים אותנו מה **יכול להיות** מספר העוגיות שחילקה הסבתא לשלושת נכדיה יחד. כלומר, עלינו להבין מהו התנאי הנוגע למספר העוגיות הכולל, ובעזרתו לבדוק את התשובות המוצעות.

מכיוון שהנכד הצעיר קיבל את סכום העוגיות הקטן ביותר נגדיר אותו באמצעות x. נתון שהאמצעי קיבל פי 2 ממנו, כלומר 2x, והבכור קיבל פי 2 מהבינוני, כלומר 4x. מכאן שסך העוגיות שחילקה הסבתא לשלושת נכדיה הוא $(x+2x+4x=)7x$. מכיוון שמספר העוגיות הוא בהכרח מספר שלם, הרי שהוא חייב להתחלק ב-7. נבדוק את התשובות המוצעות ונגלה שרק תשובה (3) – 42 עוגיות – מקיימת את התנאי.

תשובה (3).

---

2. נתונות שתי משוואות בנעלם אחד, ושואלים אותנו מהו ערכו.

__דרך א'__: בדיקת התשובות המוצעות

נחפש בתשובות מספר שמקיים את **שתי** המשוואות.

__**תשובה (1)**__: אם נציב $x=1$ במשוואה הראשונה נקבל פסוק שקר: $2x=x^2 \Rightarrow 2\cdot1=1^2 \Rightarrow 2=1$. לכן התשובה נפסלת.

__**תשובה (2)**__: אם נציב $x=2$ במשוואה הראשונה נקבל פסוק אמת: $2x=x^2 \Rightarrow 2\cdot2=2^2 \Rightarrow 4=4$, אך אם נציב $x=2$ במשוואה השנייה נקבל פסוק שקר: $x=x^3 \Rightarrow 2=2^3 \Rightarrow 2=8$. לכן התשובה נפסלת.

__**תשובה (3)**__: אם נציב $x=0$ במשוואה הראשונה נקבל פסוק אמת: $2x=x^2 \Rightarrow 2\cdot0=0^2 \Rightarrow 0=0$, וגם אם נציב $x=0$ במשוואה השנייה נקבל פסוק אמת: $x=x^3 \Rightarrow 0=0^3 \Rightarrow 0=0$. לכן זו התשובה הנכונה. אין צורך להמשיך ולבדוק תשובות נוספות.

__דרך ב'__: אלגברה

שימו לב: מכיוון שלא נתון לנו ש-x שונה מ-0 אסור לנו לחלק בו.

נחלץ את x מהמשוואה הראשונה: $2x=x^2 \Rightarrow 0=x^2-2x \Rightarrow 0=x(x-2) \Rightarrow x=0,2$

נחלץ את x מהמשוואה השנייה: $x=x^3 \Rightarrow 0=x^3-x \Rightarrow 0=x(x^2-1) \Rightarrow x=0,1,-1$

ניתן לראות כי ה-x היחיד שמקיים את שתי המשוואות הוא $x=0$.

תשובה (3).

---

3. נתונה פעולה חדשה המוגדרת על שני מספרים a ו-b כך ש: $\$(a,b)=a^2-b$, ומבקשים מאתנו לפשט בעזרתה את הביטוי: $\$(x,\$(x,y))$. מכיוון שהסימן $ מופיע בביטוי פעמיים, יש לבצע את הפעולה פעמיים בהתאם לסדר פעולות חשבון.

נתחיל מ- $\$(x,y)$ שבתוך הסוגריים. a יוחלף ב-x, ו-b יוחלף ב-y, ונקבל $\$(x,y)=x^2-y$.

כעת הביטוי שלנו הוא $\$(x,x^2-y)$. a יוחלף ב-x, ו-b יוחלף ב- (x^2-y), ונקבל $\$(x,x^2-y)=x^2-(x^2-y)$.

נפתח סוגריים ונכנס איברים כדי לקבל: $\left(x^2-(x^2-y)=x^2-x^2+y=\right)y$

תשובה (1).

---

4. נתון ריבוע ABCD ששטחו 4 סמ"ר. כמו כן, נתון ש-E היא אמצע הצלע CD, כלומר ש-BE הוא תיכון במשולש BCD. שואלים אותנו מה שטח משולש BED.

__דרך א'__:

אלכסון BD חוצה את הריבוע לשני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים ששטחו של כל אחד מהם הוא מחצית משטח הריבוע. מכאן ששטח המשולשים BCD ו-BDA הוא 2 $\left(=\frac{4}{2}\right)$ סמ"ר כל אחד.

מכיוון ש-BE מהווה תיכון במשולש BCD הוא חוצה אותו לשני משולשים שווי שטח. מכאן ששטח המשולשים BCE ו-BED הוא 1 $\left(=\frac{2}{1}\right)$ סמ"ר כל אחד.

__דרך ב'__: נוסחת שטח משולש

אנחנו צריכים למצוא שטח של משולש שכידוע שווה למחצית ממכפלת אחת מצלעותיו בגובה שלה.

נתון ששטח הריבוע הוא 4 סמ"ר, ולכן נסיק כי צלע הריבוע שווה ל-2 ס"מ. מכאן ש-DE, המהווה מחצית מצלע הריבוע, שווה ל-1 ס"מ. הגובה צלע DE (נמצא מחוץ למשולש BED) הוא BC והוא שווה לצלע הריבוע (2 ס"מ).

נציב בנוסחה ונקבל ששטח המשולש שווה ל-1 $\left(=\frac{1\cdot 2}{2}\right)$ סמ"ר.

תשובה (1).

---

5. נתון דף שעוביו 1 מילימטר. כמו כן, נתון כי כאשר מקפלים אותו לשניים עוביו של הדף המקופל הוא 2 מילימטרים. כלומר, שבכל קיפול עוביו גדל **פי** 2. שואלים אותנו לאחר כמה קיפולים עוביו של הדף יהיה 64 מילימטר. מכיוון שחלק מהמספרים שבתשובות קטנים יחסית, ננסה לפעול בהתאם לחוקיות הנתונה באופן שיטתי. נעצור כשעוביו של הדף יהיה 64 מילימטרים.

אחרי קיפול אחד עוביו של הדף יהיה בעובי של 2 מילימטר, אחרי שני קיפולים הוא יהיה בעובי של 4 $\left(=2\cdot 2\right)$ מילימטר, אחרי שלושה קיפולים הוא יהיה בעובי של 8 $\left(=2\cdot 4\right)$ מילימטר, אחרי ארבעה קיפולים הוא יהיה בעובי של 16 $\left(=2\cdot 8\right)$ מילימטר, אחרי חמישה קיפולים הוא יהיה בעובי של 32 $\left(=2\cdot 16\right)$ מילימטר, ואחרי שישה קיפולים הוא יהיה בעובי של 64 $\left(=2\cdot 32\right)$ מילימטר.

הערה: העובי ההתחלתי של הדף הוא 1 מילימטר. מכיוון שעובי הדף הוא תמיד כפולה של 2 של העובי לפני הקיפול, אז עובי הדף הוא בהכרח חזקה של 2. אם כך, שואלים אותנו 2 בחזקת איזה מספר שווה ל-64. התשובה היא 6.

תשובה (1).

---

6. בתשובות מופיעים ביטויים בשני נעלמים, ושואלים אותנו מי מהם בהכרח שווה ל-0. כלומר, עלינו לפשט את הביטויים שבתשובות כדי להגיע ל-0.

__תשובה (1)__: $(n-m)-(m-n) \Leftarrow n-m-m+n \Leftarrow 2n-2m$. הביטוי שקיבלנו שונה מ-0 ולכן התשובה נפסלת.

__תשובה (2)__: $(2n-m)-(m-2n) \Leftarrow 2n-m-m+2n \Leftarrow 4n-2m$. הביטוי שקיבלנו שונה מ-0 ולכן גם התשובה הזו נפסלת.

__תשובה (3)__: $(n-2m)+(m-2n) \Leftarrow n-2m+m-2n \Leftarrow -n-m$. הביטוי שקיבלנו שונה מ-0 ולכן גם התשובה הזו נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה, אך לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:

__תשובה (4)__: $(2n-m)+(m-2n) \Leftarrow 2n-m+m-2n \Leftarrow 0$. הביטוי שקיבלנו שווה ל-0 ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

7. נתונה המשוואה $||a-1|+1|=3$ ושואלים אותנו כמה ערכים אפשריים יכולים להיות ל-a.

<u>דרך א'</u>: הבנה אלגברית + ניסוי וטעיה

ניתן לראות בתשובות כי יש רק מספר מצומצם של ערכים יקיים את המשוואה (בין 0 ל-4 ערכים בלבד), ולכן ננסה לחשוב על כל הערכים שמקיימים אותה.

$|a-1|$ הוא ביטוי שאם נוסיף לו 1 נקבל מספר שערכו המוחלט שווה ל-3. כלומר, נקבל מספר ששווה ל-3 או ל- (-3).

על מנת שהמספר יהיה שווה ל-3, על הביטוי $|a-1|$ להיות שווה ל-2. זה יכול לקרות כש-a שווה ל-3, או לחלופין כשהוא שווה ל- (-1). כלומר, שני הערכים 3 ו- (-1) מקיימים את המשוואה.

על מנת שהמספר יהיה שווה ל- (-3), על הביטוי $|a-1|$ להיות שווה ל- (-2). זה בלתי אפשרי כיוון שערך מוחלט אינו יכול להיות שלילי.

מכאן שרק שני ערכים מקיימים את המשוואה: 3 ו- (-1).

<u>דרך ב</u>: אלגברה – פישוט משוואה

נתונה משוואה שבצידה האחד מופיע ערך מוחלט, ובצידה האחר מופיע מספר חיובי. כדי לפתור אותה עלינו לבדוק שני מקרים, כאשר הביטוי בערך המוחלט שווה למספר עם מקדם חיובי, וכאשר הוא שווה לאותו מספר רק עם מקדם שלילי.

נתון ש- $||a-1|+1|=3$. נקבל שתי משוואות: $|a-1|+1=3$ או לחלופין $|a-1|+1=-3$. נבדוק כל מקרה בנפרד:

מקרה א': $|a-1|+1=3 \Leftarrow |a-1|=2$. גם כאן נקבל שתי משוואות: $a-1=2$ או לחלופין $a-1=-2$. נבודד את a מכל אחת מהמשוואות ונקבל ש- $a=3$ או לחלופין $a=-1$.

מקרה ב': $|a-1|+1=-3 \Leftarrow |a-1|=-4$. אין אף a שיקיים את המשוואה שכן ערך מוחלט אינו יכול להיות שלילי.

מכאן שיש שני ערכים שמקיימים את המשוואה $a=3$ או ו- $a=-1$.

תשובה (2).

---

8. לפנינו שאלה שעוסקת בזוויות במשולש בה אנו מתבקשים להביע את זווית β באמצעות זווית α.

ראשית, נסמן זוויות על גבי המשולשים: $\sphericalangle ABD$ משלימה את $\sphericalangle DBC$ ל- 90°, ולכן היא שווה ל- $(90^\circ-\alpha)$. מכיוון שנתון שמשולש ADB הוא משולש שווה שוקיים $(AD=BD)$, נסיק כי גם $\sphericalangle BAD$ שווה ל- $(90^\circ-\alpha)$.

מכיוון שכעת יש לנו את כל זוויותיו של משולש ABC, מובעות באמצעות β ו- α, ניתן לסכום אותן ל- 180° ולחלץ מהמשוואה את הקשר ביניהן. נעשה זאת באופן הבא:

$$\sphericalangle ABC+\sphericalangle ACB+\sphericalangle BAC=180^\circ \Rightarrow 90^\circ+\beta+(90^\circ-\alpha)=180^\circ.$$

נבודד את β ונקבל $90^\circ+\beta+90^\circ-\alpha=180^\circ \Rightarrow 180^\circ+\beta-\alpha=180^\circ \Rightarrow \beta-\alpha=0 \Rightarrow \beta=\alpha$

תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 12-9)

9. עלינו למצוא בכמה מהשנים המתוארות בתרשים כמות הגשמים שירדו בקיץ ובסתיו יחד הייתה **גדולה יותר** ממחצית כמות הגשמים שירדו בשנה כולה.

ראשית עלינו להבין כיצד יראה מקרה בו כמות הגשמים שירדו בקיץ ובסתיו יחד גדולה יותר ממחצית כמות הגשמים שירדו בשנה כולה מבחינה ויזואלית. מכיוון שיש בסך הכול ארבע עונות בשנה, נרצה שבעונות הקיץ והסתיו יחד ירדו יותר גשמים מאשר בשתי העונות האחרות (אביב וחורף).

כעת נבדוק כל אחת מהשנים המתוארות בתרשים האם גובה העמודות של הקיץ והסתיו גדול מגובה העמודות של החורף והאביב.

שנת 2000**:** ניתן לראות ששתי העמודות של הקיץ והסתיו יחד **גבוהות** משתי העמודות של החורף והאביב יחד. מתאים.

שנת 2001**:** ניתן לראות ששתי העמודות של הקיץ והסתיו יחד **נמוכות** משתי העמודות של החורף והאביב יחד. לא מתאים.

שנת 2002**:** קצת קשה לראות בעין, ולכן נחשב.
העמודות של הקיץ והסתיו יחד שוות ל-500 $(=250+250)$, והעמודות של החורף והאביב יחד שוות גם הן ל- ל-500 $(=200+300)$. אנחנו מחפשים רק שנים שבהן הן גבוהות יותר - לא מתאים.

שנת 2003**:** ניתן לראות ששתי העמודות של הקיץ והסתיו יחד **שוות** לשתי העמודות של החורף והאביב יחד. אנחנו מחפשים רק שנים שבהן הן גבוהות יותר - לא מתאים.

שנת 2004**:** ניתן לראות ששתי העמודות של הקיץ והסתיו יחד **גבוהות** משתי העמודות של החורף והאביב יחד. מתאים.
מכאן שרק בשנים 2000 ו-2004 כמות הגשמים שירדו בקיץ ובסתיו יחד הייתה **גדולה יותר** ממחצית כמות הגשמים שירדו בשנה כולה

תשובה (2).

---

10. נתון ש"מדד חורף" הוא ההפרש בין כמות הגשמים **בחורף של אותה שנה** לבין כמות הגשמים **בסתיו של השנה הקודמת**, ושואלים אותנו לאילו מצמדי השנים שבתשובות יש את אותו מדד חורף. נבדוק זאת:

<u>תשובה (1)</u>: 2001 ו-2003. מדד החורף של שנת 2001 שווה ל- 0 $(=275-275)$, ומדד החורף של שנת 2003 שווה ל- 25 $(=275-250)$. לשנים אלו אין את אותו מדד חורף ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 2001 ו-2004. כבר חישבנו שמדד החורף של שנת 2001 שווה ל-0. מדד החורף של שנת 2004 שווה ל- 25 $=|-25|=(=200-225)$. לשנים אלו אין את אותו מדד חורף ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 2002 ו-2003. מדד החורף של שנת 2002 שווה ל- 0 $=(=200-175)$, וכבר חישבנו את מדד החורף של שנת 2003 השווה ל-25 . לשנים אלו יש את אותו מדד חורף ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

11. עלינו למצוא באיזו שנה מבין השנים המופיעות בתשובות נאגרה כמות המים הגדולה ביותר, אם ידוע לנו שבכל שנה אוגרים את כל הגשמים שיורדים בסתיו, ואת מחצית מהגשמים שיורדים באביב. נבדוק זאת:

<u>תשובה (1)</u>: שנת 2000. בסתיו ירדו 275 מ"מ גשם, ובאביב ירדו 275 מילימטר גשם גם כן. מכאן שנאגרו בה 412.5 $=\left(=275+\frac{275}{2}\right)$ מ"מ של גשם בסך הכול.

<u>תשובה (2)</u>: שנת 2002. בסתיו ירדו 250 מ"מ גשם, ובאביב ירדו 300 מילימטר גשם. מכאן שנאגרו בה 400 $=\left(=250+\frac{300}{2}\right)$ מ"מ של גשם בסך הכול. כמות זאת קטנה מהכמות שנאגרה בשנת 2000 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): שנת 2003. בסתיו ירדו 225 מ״מ גשם, ובאביב ירדו 225 מילימטר גשם. מכאן שנאגרו בה $337.5 = \left(225 + \frac{225}{2} = \right)$ מילימטר של גשם בסך הכול. כמות זאת קטנה מהכמות שנאגרה בשנת 2000 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): שנת 2004. בסתיו ירדו 275 מ״מ גשם, ובאביב ירדו 250 מילימטר גשם. מכאן שנאגרו בה $400 = \left(275 + \frac{250}{2} = \right)$ מ״מ של גשם בסך הכול. כמות זאת קטנה מהכמות שנאגרה בשנת 2000 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

12. נתון לנו שכמות הגשמים הממוצעת שירדה בסתיו במהלך 5 שנים (2002 עד 2006) הוא 270 מ״מ. נשתמש בנוסחת הממוצע לפיה אם נכפול את כמות האיברים בממוצע נקבל את סכום האיברים, ונגלה כי כמות הגשמים הכוללת שירדה בסתיו במהלך אותן שנים שווה ל- $1,350 = (5 \cdot 270 =)$ מ״מ.

אם נחסר מסכום זה את כמות הגשמים שירדו בסתיו במהלך השנים 2002, 2003 ו-2004, נקבל את כמות הגשמים שירדו בסתיו בשנים 2005 ו-2006.

מכאן שכמות הגשמים שירדו בסתיו בשנים 2005 ו-2006 היא $600 (= 1,350 - 250 - 225 - 275)$

תשובה (3).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. נתון לנו ששטחו של מלבן שווה לגזרת המעגל המסומנת באפור. כמו כן נתון שרדיוס המעגל המהווה גם את רוחב המלבן שווה ל-4 ס״מ, ואנו מתבקשים למצוא את אורך המלבן.

נחשב תחילה את שטח הגזרה הצבוע באפור. אנחנו יודעים ששטח גזרה במעגל שווה לשטח המעגל כפול חלקה היחסי של הגזרה. שטח המעגל כולו שווה ל- $16\pi \left(= \pi \cdot 4^2 = \pi r^2\right)$. הזווית המרכזית של הגזרה הלבנה ($\sphericalangle AOB$) היא גם אחת מזוויות המלבן ולכן שווה ל- 90°, ומכאן שהזווית המרכזית עליה נשענת הגזרה הצבועה באפור שווה ל- $270^\circ \left(= 360^\circ - 90^\circ\right)$. מכאן שחלקה היחסי של הגזרה האפורה מתוך כלל שטח המעגל היא $\frac{3}{4} \left(= \frac{270}{360}\right)$. אם כן, שטח הגזרה האפורה (וגם שטח המלבן) שווים ל- $12\pi \left(= \frac{3}{4} \cdot 16\pi\right)$.

אנחנו יודעים ששטח מלבן שווה לאורכו כפול רוחבו. רוחב המלבן הוא 4, ואורכו הוא צלע AC אותה נתבקשנו למצוא. נבנה את המשוואה הבאה: $4 \cdot AC = 12\pi$. נחלק את שני צדי המשוואה ב-4 כדי לחלץ את AC ונגלה כי הוא שווה ל- 3π.

תשובה (3).

---

14. עלינו למצוא בכמה דרכים שונות ניתן להגיע מ-A ל-C אם ידוע שמותר ללכת רק על הקווים מנקודה לנקודה, ושאסור לעבור באותה נקודה פעמיים. מהמספרים שבתשובות נסיק כי מספר האפשרויות מצומצם, ולכן נפרוט את כל האפשרויות באופן שיטתי.

מקודקוד A ניתן להגיע ישירות אל קודקוד C.

מקודקוד A ניתן להגיע לקודקוד B וממנו ישירות לקודקוד C.

מקודקוד A ניתן להגיע לקודקוד B, ממנו לקודקוד D, ומשם לקודקוד C.

מקודקוד A ניתן להגיע לקודקוד D וממנו ישירות לקודקוד C.

מקודקוד A ניתן להגיע לקודקוד D, ממנו לקודקוד B, ומשם לקודקוד C.

כלומר, יש בסך הכול 5 דרכים שונות להגיע מנקודה A לנקודה C
תשובה (4).

---

15. נתון הביטוי $(5!)^2$ ושואלים אותנו באיזה מהמספרים שבתשובות הוא **אינו** מתחלק.

הערה: נזכור כי $5!$ שווה למכפלת כל המספרים החיוביים השלמים מ-1 ועד 5, ולכן ניתן להציגו גם באופן הבא: $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$. מכאן שהביטוי $(5!)^2$ שווה ל- $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, או לחלופין ל- $2^6\cdot3^2\cdot5^2\ (=1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2\cdot5)$.

נבדוק את התשובות המוצעות באופן הבא - נפרק כל אחד מהמספרים שבתשובות לגורמים ראשוניים, ונבדוק האם כולם מופיעים גם ב- $(5!)^2$. אם כן, אז $(5!)^2$ בהכרח מתחלק במספר, ואם לא, אז הוא בהכרח אינו מתחלק בו.

<u>תשובה (1)</u>: 18. את המספר 18 ניתן להציג גם באופן הבא: $2\cdot3^2\ (=2\cdot3\cdot3=2\cdot9)$. מכיוון שהגורם הראשוני 3 מופיע ב- $(5!)^2$ פעמיים, והגורם הראשוני 2 מופיע בו יותר מפעם אחת, הרי שניתן לקבוע כי $(5!)^2$ בהכרח מתחלק ב-18. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 72. את המספר 72 ניתן להציג גם באופן הבא: $2^3\cdot3^2\ (=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3=8\cdot9)$. מכיוון שהגורם הראשוני 3 מופיע ב- $(5!)^2$ פעמיים, והגורם הראשוני 2 מופיע בו יותר מ-3 פעמים (בין היתר פעמיים בכל 4) הרי שניתן לקבוע כי $(5!)^2$ בהכרח מתחלק ב-72. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 54. את המספר 54 ניתן להציג גם באופן הבא: $2\cdot3^3\ (=2\cdot3\cdot3\cdot3=6\cdot9)$. מכיוון שהגורם הראשוני 3 מופיע ב- $(5!)^2$ רק פעמיים, ואילו במספר 54 הוא מופיע שלוש פעמים, הרי שניתן לקבוע כי $(5!)^2$ **אינו** מתחלק ב-54. זו התשובה הנכונה.

לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם את התשובה הנותרת:

<u>תשובה (4)</u>: 40. את המספר 40 ניתן להציג גם באופן הבא: $2^3\cdot5\ (=2\cdot2\cdot2\cdot5=4\cdot10)$. מכיוון שהגורם הראשוני 2 מופיע ב- $(5!)^2$ יותר משלוש פעמים, והגורם הראשוני 5 מופיע בו יותר מפעם אחת, הרי שניתן לקבוע כי $(5!)^2$ בהכרח מתחלק ב-40. התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

16. נתונים לנו שני ריבועים שההפרש בין השטחים שלהם שווה ל-15 סמ״ר.
כמו כן, נתון לנו ש- $AG=2\cdot GD$. שואלים אותנו מהי אורך הצלע של הריבוע הגדול.
כיוון שיש לנו גודל ממשי ויחס נתון, נבנה משוואה. נגדיר את GD באמצעות x, ומהנתון נסיק כי AG שווה ל-2x. מכאן שצלע הריבוע הקטן הוא 2x וצלע הריבוע הגדול $3x\ (=2x+x)$. שטח הריבוע הקטן יהיה שווה ל- $4x^2\ (=(2x)^2)$, ושטח הריבוע הגדול יהיה שווה ל- $9x^2\ (=(3x)^2)$.

כעת נבנה את המשוואה לפיה ההפרש בין שטחי הריבועים שווה ל-15 סמ״ר, ונחלץ את x:
$9x^2-4x^2=15 \Rightarrow 5x^2=15 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$.
אנחנו מחפשים את הצלע של הריבוע הגדול שאורכה 3x. נציב $x=\sqrt{3}$ ונקבל שאורך הצלע הוא $3\sqrt{3}$

תשובה (4).

---

17. על מערכת צירים נתונה נקודה (x,y) הנמצאת במרחקים שווים מהנקודות $(0,a)$, $(0,-a)$ ו-$(b,0)$, ושואלים אותנו מה נכון בהכרח לגבי x או y. נבדוק מה ידוע לנו על הנקודה.

כדי שהנקודה (x,y) תמצא במרחק שווה מהנקודות $(0,a)$ ו-$(0,-a)$, היא חייבת להיות ממוקמת על ציר ה-x. מכאן שערך ה-y של הנקודה חייב להיות 0.

זה מספיק כדי לפסול את תשובה (4) ולקבוע שתשובה (2) בהכרח נכונה, אך למען שלמות ההסבר נציין מדוע שאר התשובות אינן נכונות. כלומר, נבין מה ידוע לנו בוודאות על ערך ה-x של הנקודה.

ידוע לנו כי ערך ה-x של שתיים מהנקודות הוא 0, ושל הנקודה השלישית הוא b. מכאן ניתן להסיק כי ערך ה-x של הנקודה חייב להיות בין 0 ל-b, קרוב יותר ל-0 מאשר ל-b. מכאן שהוא קטן מ- $\frac{b}{2}$ וגדול מ-0. תשובות (1) ו-(3) נפסלות.

תשובה (2).

---

18. לפנינו שאלת הספק מסוג צוותים. נתון ש-6 פועלים, העובדים בקצב קבוע וזהה, בונים בניין ב-50 ימים. כמו כן, נתון שבפועל כל 6 הפועלים עבדו יחד במשך 20 ימים, ורק מחצית מהם (3 פועלים) המשיכו לעבוד עד להשלמת הבניין. שואלים אותנו בכמה ימים בסך הכול הושלמה בניית הבניין.

ב-20 הימים הראשונים עבדו כל 6 הפועלים, ולכן הם עבדו בקצב לפיו הם אמורים להשלים את הבניין ב-50 ימים. מכאן שהזמן שהיה לוקח ל-6 פועלים להשלים את בניית הבניין הוא 30 ימים. מכיוון שרק **מחצית מהפועלים** המשיכו לעבוד, הרי שהם יצטרכו **פי 2 זמן** יותר להשלים את העבודה. כלומר, הזמן שייקח למחצית מהפועלים להשלים את העבודה הוא $60 \left(= 30 \cdot 2\right)$ ימים. מכאן שבניית הבניין הושלמה ב- $80 \left(= 60 + 20\right)$ ימים בסך הכול.

תשובה (4).

---

19. לפנינו שאלת ממוצעים מסוג ממוצע משוקלל. נתון שערבבו תמיסת מלח בריכוז 9% עם תמיסת מלח בריכוז 6%, ושעל כל גרם מהתמיסה הראשונה הוסיפו 2 גרם מהתמיסה השנייה. שואלים אותנו מה ריכוז התמיסה שהתקבלה.

<u>**דרך א'**</u>: נוסחת הממוצע

נזכור כי ממוצע משוקלל הוא ממוצע המחושב בין קבוצות שונות כאשר מתחשבים במשקל של כל קבוצה. במקרה הזה נתון לנו שעל כל 2 יחידות של תמיסה מסוג 6%, מוסיפים 1 יחידה של תמיסה מסוג 9%. לכן אם נציב בנוסחת הממוצע נקבל:

$$\frac{1 \cdot 9\% + 2 \cdot 6\%}{1+2} = \frac{9\% + 12\%}{3} = \frac{21\%}{3} = 7\%$$

<u>**דרך ב'**</u>: שיטת הסקאלה

כאשר מחשבים ממוצע בין שתי קבוצות, הוא בהכרח יימצא ביניהן. כמו כן, הוא בהכרח יהיה קרוב יותר לקבוצה הגדולה. במקרה זה הממוצע יהיה בין 6% ל-9%, וקרוב יותר ל-6% מאשר ל-9%. תשובה (4) נפסלת. על מנת למצוא את הממוצע המדויק עלינו לחלק את הפער בין גדלי הקבוצות בהתאם ליחס הגדלים שלהן. הפער בין גדלי הקבוצות הוא $3\% \left(= 9\% - 6\%\right)$, ועלינו לחלק אותו ביחס של 1:2, כלומר ל-1% ו-2%.

לפיכך אחוז המלח בתמיסה החדשה יהיה: $7\% \left(= 6\% + 1\% = 9\% - 2\%\right)$

תשובה (2).

---

20. נתון כי p הוא שבר חיובי בין 0 ל-1 וכי n הוא מספר שלם וחיובי, ושואלים אותנו איזה מאי-השוויונות שבתשובות **אינו** נכון. נבדוק את התשובות המוצעות:

__**דרך א'**__: הבנה אלגברית

__תשובה (1)__: $p^{n+1} < p^n$. כאשר בסיס החזקה הוא שבר חיובי בין 0 ל-1, ככל שהמעריך הוא שלם חיובי גדול יותר, התוצאה שתתקבל תהיה קטנה יותר. לכן אי-שווין זה **בהכרח נכון** והתשובה נפסלת.

__תשובה (2)__: $1 < p^{-n}$. ניתן לכתוב את הביטוי p^{-n} גם באופן הבא $\frac{1}{p^n}$.

p הוא שבר בין 0 ל-1 ולכן גם p^n הוא שבר בין 0 ל-1. אם נחלק את המספר 1 בשבר בין 0 ל-1 נקבל בהכרח מספר הגדול מ-1. לכן אי-שווין זה **בהכרח נכון** והתשובה נפסלת.

__תשובה (3)__: $p^{\frac{1}{n}} < 1$. ניתן לכתוב את הביטוי $p^{\frac{1}{n}}$ גם באופן הבא $\sqrt[n]{p}$.

p הוא שבר בין 0 ל-1. אם נפעיל עליו שורש כלשהו הוא בהכרח יגדל אך עדיין יישאר שבר בין 0 ל-1. לכן אי-שווין זה **בהכרח נכון** והתשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה, אך לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:

__תשובה (4)__: $p^{\frac{1}{n}} < p$. ניתן לכתוב את הביטוי $p^{\frac{1}{n}}$ גם באופן הבא $\sqrt[n]{p}$.

p הוא שבר בין 0 ל-1. אם נפעיל עליו שורש כלשהו הוא בהכרח יגדל. לכן אי-שווין זה **אינו נכון** וזו התשובה הנכונה.

__**דרך ב'**__: הצבת דוגמה מספרית

לשם הנוחות נציב $p = \frac{1}{2}$ ו- $n = 1$ ונחפש אי-שוויון שאינו נכון:

__תשובה (1)__: $p^{n+1} < p^n$. נקבל $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Leftarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. קיבלנו אי-שוויון נכון, ולכן נמשיך לבדוק.

__תשובה (2)__: $1 < p^{-n}$. נקבל $1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftarrow 1 < 2$. קיבלנו אי-שוויון נכון, ולכן נמשיך לבדוק

__תשובה (3)__: $p^{\frac{1}{n}} < 1$. נקבל $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1}} < 1 \Leftarrow \frac{1}{2} < 1$. קיבלנו אי-שוויון נכון, ולכן נמשיך לבדוק.

__תשובה (4)__: $p^{\frac{1}{n}} < p$. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1}} < \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. קיבלנו אי-שוויון **שאינו** נכון. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).