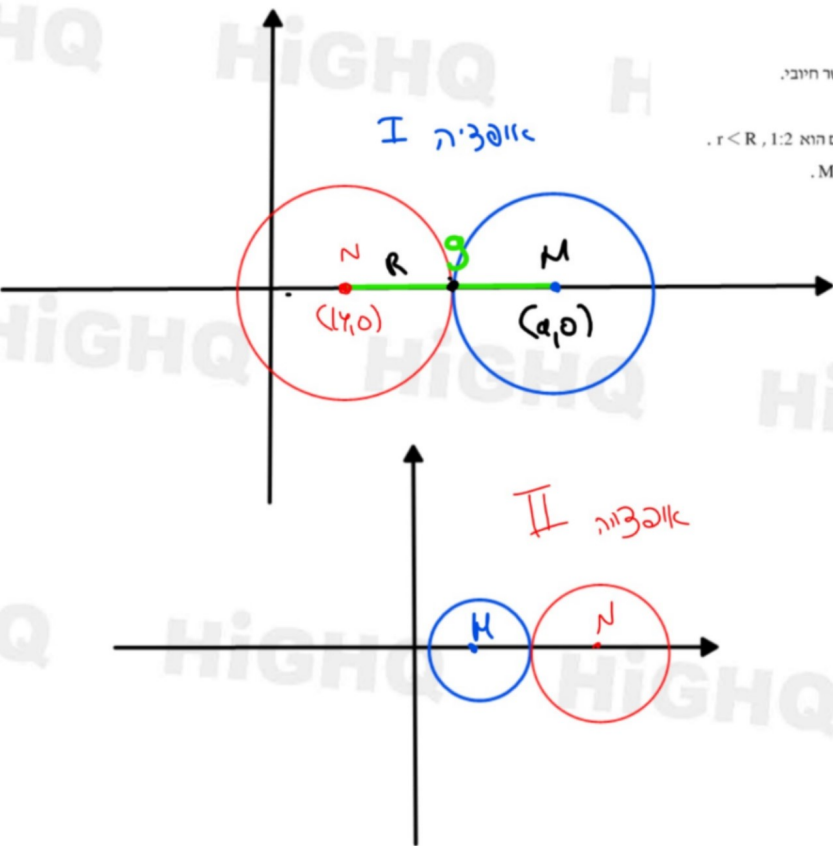


# פתרון בגרות מועד א קיץ 22

1. נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
- מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה  $M$  ומשוואתו היא  $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ , הוא פרמטר חיובי.
- מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה  $N$  ומשוואתו היא  $(x-14)^2 + y^2 = R^2$ .
- אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא  $r < R, 1:2$ .
- א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו  $N$  ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו  $M$ .
- נתון כי  $a < 14$ .
- ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.
- ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.
- ד. הישר  $mx - y + n = 0$  הוא משיק משותף לשני המעגלים. מצאו את  $m$  ואת  $n$  (שתי אפשרויות).
- נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.
- משוואות המעגלים הן:  $(x-t)^2 + y^2 = R^2$ ;  $(x-k)^2 + y^2 = R^2$ ;  $t, k$  הם פרמטרים.
- ערכי הרדיוסים  $r, R$  זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.
- ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה?  
אם כן - מצאו את  $t$  ואת  $k$ . אם לא - נמקו.

## פתרון

- נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
- מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה  $M$  ומשוואתו היא  $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ , הוא פרמטר חיובי.
- מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה  $N$  ומשוואתו היא  $(x-14)^2 + y^2 = R^2$ .
- אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא  $r < R, 1:2$ .
- א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו  $N$  ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו  $M$ .



משוואת מעגל  $M$

$$|a-14| = 9$$

$$\downarrow$$

$$a-14 = \pm 9 \rightarrow a = 14+9 = 23$$

$$\rightarrow a = -9+14 = 5$$

כמו כן ניתן  
בין ארבעה משוואות הוא

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}, \text{ היחס}$$

$$r + R = 9 \Rightarrow r + 2r = 9 \Rightarrow r = 3$$

$$R = 6$$

משוואת מעגל שמרכזו  $M$ :

$$(x-23)^2 + y^2 = 9$$

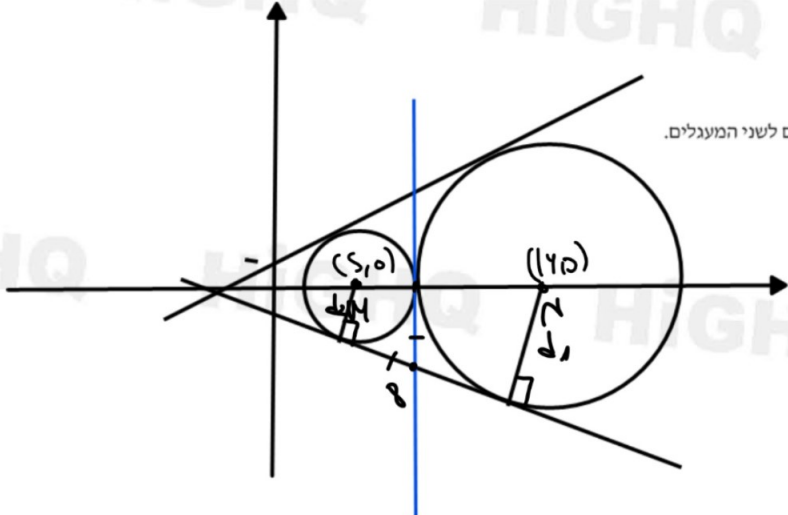
משוואת מעגל שמרכזו  $N$ :

$$(x-5)^2 + y^2 = 9$$

$$(x-14)^2 + y^2 = 36$$

נתון כי  $a < 14$ .

ג. סרטוט במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.



$$(x-5)^2 + y^2 = 9 \quad : M$$

$$(x-14)^2 + y^2 = 36 \quad : N$$

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

אשר העובר בתוך המעגל 2 המגלים לאורך 8.3 יו 1,1

המשיק:  $5+3=8$

משוואת המשיק  $x=8$

ד. הישר  $x - y + n = 0$  הוא משיק משותף לשני המעגלים. מצאו את  $n$  ואת  $n$  (שתי אפשרויות).

מרכז המשיק המרכזי המגלים שיהיה 8.3 יו 1,1 המעגלים.

$$d_1 = \frac{|m \cdot 14 + 0 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 6 \quad \rightarrow (14m + n)^2 = 36(m^2 + 1)$$

$$d_2 = \frac{|m \cdot 5 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \quad \rightarrow (5m + n)^2 = 9(m^2 + 1)$$

לפתור מערכת משוואות

$$\begin{cases} (14m+n)^2 = 36(m^2+1) \\ (5m+n)^2 = 9(m^2+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (14m+n)^2 = 36(m^2+1) \\ 4(5m+n)^2 = 36(m^2+1) \end{cases}$$

$$(14m+n)^2 = 4(5m+n)^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$|14m+n| = \pm 2|5m+n|$$

ישנם 2 פתרונות

$$\textcircled{1} \quad 14m+n = 10m+2n$$

$$4m = n$$

$$\textcircled{2} \quad 14m+n = -10m-2n$$

$$24m = -3u \rightarrow u = -8m$$

$$(5m+u)^2 = 9(m^2+1) \quad \text{במילואי:}$$

$$\begin{aligned} n &= -8m \quad (2) \\ (5m-8m)^2 &= 9m^2+9 \\ 9m^2 &= 9m^2+9 \end{aligned}$$

פסול

$$\begin{aligned} 4m &= u \quad (1) \\ (5m+4m)^2 &= 9m^2+9 \\ 81m^2 &= 9m^2+9 \\ 72m^2 &= 9 \rightarrow m^2 = \frac{1}{8} \rightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

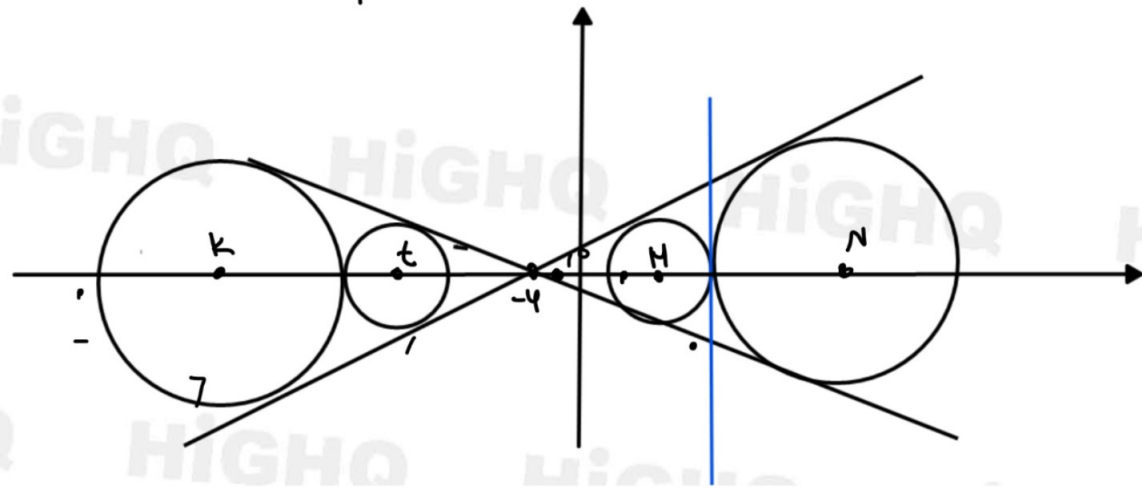
$$n = \pm 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$$

המשוואות:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{\sqrt{8}}x - y + \frac{2}{\sqrt{2}} &= 0 \\ (2) \quad -\frac{1}{\sqrt{8}}x - y - \frac{2}{\sqrt{2}} &= 0 \end{aligned}$$

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.  
 משוואות המעגלים הן:  $(x-k)^2 + y^2 = R^2$ ;  $(x-t)^2 + y^2 = r^2$ ; הם פרמטרים.  
 ערכי הרדיוסים  $R$  ו- $r$  זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.  
 האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה?  
 אם כן - מצאו את  $t$  ואת  $k$ . אם לא - נמקד.

המטרה ייתכן: יכולים להיות נקודות המשיק שלהם נק' החיתוך בין המשיקים  
 בין המשיקים  $\leftarrow$  כי המשיקים סימטרית סביב נק' חיתוך בין המשיקים



פ'תרון |<sup>2</sup> |<sup>2</sup> |<sup>2</sup> |<sup>2</sup> |<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{2}}x - y + \frac{2}{\sqrt{2}} = 0 & \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} - y = -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \textcircled{2} -\frac{1}{\sqrt{2}}x - y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0 & x = -4 \end{cases}$$

$$x_M - (-4) = -4 - t$$

$$5 + 4 = -4 - t \quad \rightarrow t = -13$$

$$t - 9 = k \quad \rightarrow k = -22$$

g = פ'תרון פ'תרון

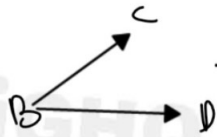
שאלה 2

2. נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור:  $A(4, p, -1)$ ,  $B(7, 5, 5)$ ,  $C(1, -1, 2)$ ,  $D(-2, 5, -4)$ .  $p$  הוא פרמטר.
- מצאו את משוואת המישור  $ABCD$ .
  - חשבו את ערך הפרמטר  $p$ .
  - הוכיחו כי המרובע  $ABCD$  הוא ריבוע.
- הנקודה  $S$  היא קודקוד של פירמידה  $SABCD$  שבסיסה  $ABCD$ .  
 המקצוע  $SC$  מונח על הישר  $\underline{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$ .  
 נתון כי נפח הפירמידה הוא  $81$ .
- מצאו את שיעורי הנקודה  $S$  (שתי אפשרויות).
  - נתון מישור נוסף  $\pi$  המאונך למקצוע  $SC$ .
  - מצאו את הזווית שבין המישור  $ABCD$  ובין המישור  $\pi$ .

פתרון

א. מצאו את משוואת המישור  $ABCD$ .

$B(7, 5, 5)$ ,  $C(1, -1, 2)$ ,  $D(-2, 5, -4)$



לפני 2 וקטורי כיוון

$$\vec{BC} = (-6, -6, -3) = (2, 2, 1)$$

$$\vec{BD} = (-9, 0, -9) = (1, 0, 1)$$

נמצא מכפלה וקטורית כדי למצוא את  $\vec{h}$

$$\begin{array}{r} (2, 2, 1) \\ \times (1, 0, 1) \\ \hline (a, b, c) \end{array}$$

$$\Rightarrow a=2 \quad b=-(2-1)=-1 \quad c=-2$$

$$\vec{h} = (2, -1, -2)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(3) את  $\vec{h}$  ואם הנק' אמצא את  $d$

$$2x - y - 2z + d = 0$$

צבוק אר נק  $C(1, -1, 2)$

$$2 \cdot 1 + 1 - 4 + d = 0$$

$$d = 1$$

זמן משוואת הישר :

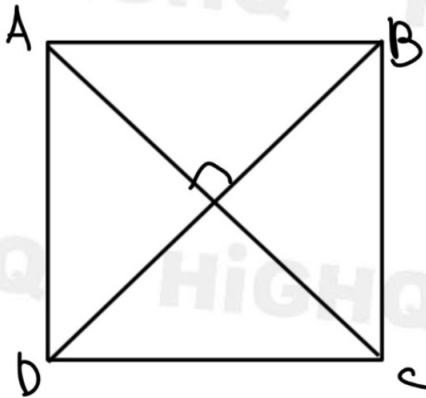
$$2x - y - 2z + 1 = 0$$

ג. חשבו את ערך הפרמטר  $p$ .

צבוק אר נק  $A(4, p, -1)$  במישור הישר  $2x - y - 2z + 1 = 0$ .

$$2 \cdot 4 - p + 2 + 1 = 0 \Rightarrow p = 11$$

ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.



ענכית כי ABCD מרובע  
(כל הצלעות שוות)

ענכית כי אחת הישוליות בת  $90^\circ$

$$A(4, 11, -1)$$

$$B(7, 5, 5), C(1, -1, 2), D(-2, 5, -4)$$

$$\vec{AB} = B - A = (3, -6, 6)$$

$$\vec{BC} = C - B = (-6, -6, -3)$$

$$\vec{CD} = D - C = (-3, 6, -6)$$

$$\vec{AD} = D - A = (-6, -6, -3)$$

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$$

$$|BC| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$$

$$|CD| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$$

$$|AD| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$$

המקרה

מ"מ

← קטן נראה כי  $\angle DAB = 90^\circ$

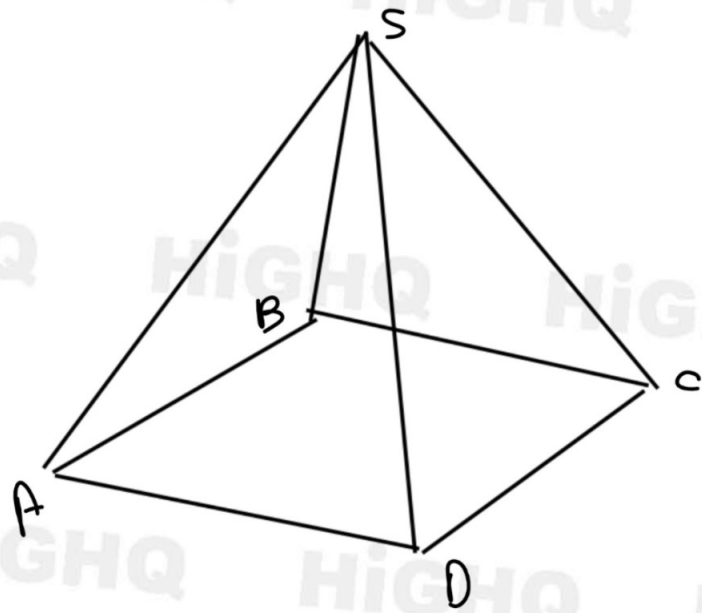
אם הנכפלה הסקלרית לווה  $\rightarrow$  הוקטורים מאונכים

$$\vec{AB} = B - A = (3, -6, 6)$$

$$\vec{AD} = D - A = (-6, -6, -3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = (3, -6, 6) \cdot (-6, -6, -3) = -18 + 36 - 18 = 0$$

ולכן אם במאונך אלויות השוויות בת  $90^\circ$  יתה'ה



הנקודה S היא קודקוד של פירמידה S ABCD שבסיסה ABCD.  
 המקצוע SC מונח על הישר  $\vec{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$ .  
 נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.  
 ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).

נמצא את אורך זרוע הפינמוצה:

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{9^2 \cdot h}{3} = 81$$

$$h = 3$$

ולכן ממק הנק S ממילוי ABCD הוא 3

נציג את S בצורה

$$S = (t, -4+3t, 1+t)$$

נציג בנוסחה:

$$\frac{|v \cdot p + e|}{|v|}$$

מרחק בין נקודה p למישור  $v \cdot x + e = 0$

$$\vec{v} = \vec{h} = (2, -1, -2)$$

$$3 = \frac{|(2, -1, -2) \cdot (t, -4+3t, 1+t) + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2t + 4 - 3t - 2 - 2t + 1|}{3} = \frac{|-3t + 3|}{3} = |-t + 1|$$

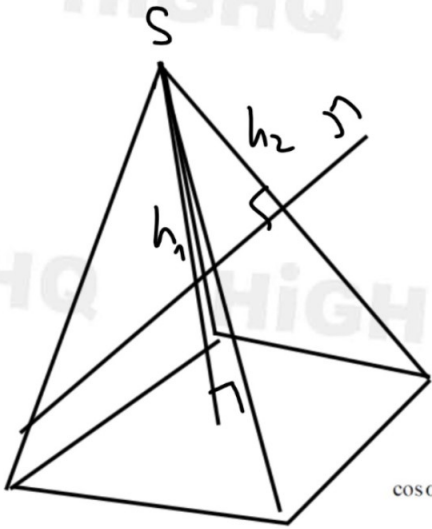
$$3 = \pm(-t + 1) \rightarrow 3 = -t + 1 \rightarrow t = -2$$

$$\rightarrow 3 = t - 1 \rightarrow t = 4$$

$$S = (t, -4+3t, 1+t) \quad : S \quad \text{נק' } S$$

$$S(-2, -10, -1) \quad : I \quad \text{אפשרות I}$$

$$O(4, 8, 5) \quad : II \quad \text{אפשרות II}$$



נתון מישור נוסף  $\pi$  המאונך למקצוע SC.

ה. מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור  $\pi$ .

SC מהווה אנך למישור  $\pi$

$$C(1, -1, 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|}$$

$$v_2 \cdot x + c_2 = 0, \quad v_1 \cdot x + c_1 = 0$$

נשתמש  
בנוסחה:

$$h_2 = (1, 3, 1)$$

SC  $\vec{h}$

ניקח את וקטור הכיוון

$$h_1 = (2, -1, -2) \quad \text{א' } \vec{h}$$

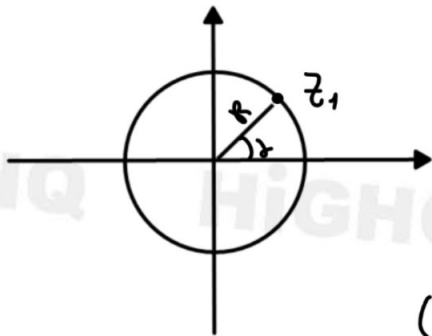
$$\cos \alpha = \frac{|(1, 3, 1) \cdot (2, -1, -2)|}{\sqrt{1+9+1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{|2-3-2|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{11}}$$

$$\alpha = 72.45^\circ$$



3. נתונה המשוואה  $z, \bar{z}^2 + z\bar{z} = \bar{z} + 2z + 9 - 7i$  הוא מספר מרוכב.
- $z_1$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.
- א. מצאו את משוואת המעגל.
- ב. חוסימים במעגל ריבוע שאחד מקודקדיו מיוצג על ידי המספר  $z_1$ .
- ג. חשבו את שטח הריבוע.
- ד. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- ה. מצא את משוואת המעגל.
- ז. חשבו את  $r_1 \cdot r_2$ .
- ח. חשבו את  $r_1 \cdot r_2$ .
- ט. חשבו את  $r_1 \cdot r_2$ .
- י. חשבו את  $r_1 \cdot r_2$ .

פתרון



נתונה המשוואה  $z, \bar{z}^2 + z\bar{z} = \bar{z} + 2z + 9 - 7i$  הוא מספר מרוכב.

$z_1$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

$$z = x + iy$$

נציב במשוואה

$$(x - iy)^2 + (x^2 + y^2) = (x - iy) + 2(x + iy) + 9 - 7i$$

$$x^2 - 2ixy - y^2 + x^2 + y^2 = x - iy + 2x + 2iy + 9 - 7i$$

לשווא בין ממשי - ממשי, נצימה נצימה

$$\begin{cases} 2x^2 = 3x + 9 & (1) \\ -2xy = y - 7 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 9 = 0 \\ -2xy = y - 7 \end{cases}$$

נפתור את (1)

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1.5$$

נציב ב(2)

$$-2 \cdot 3 \cdot y = y - 7$$

$$-7y = -7 \rightarrow y = 1$$

ולכן:

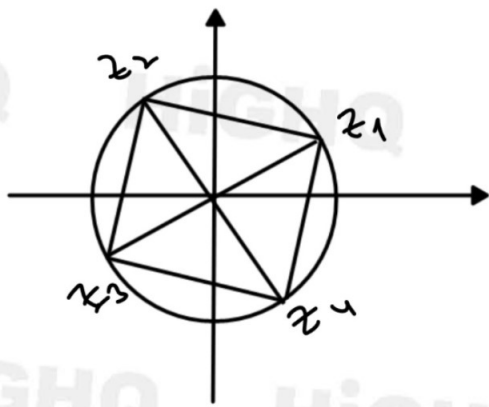
$$z_1 = 3 + i$$

$$R = |z_1| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

ואילו

ולכן משוואת המעגל

$$x^2 + y^2 = 10$$



חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר  $z_1$ .

ב. חשבו את שטח הריבוע.

נק' חיתוך של אלכסונים עובר במרכז המעגל, ולכן אורך האלכסון  $d = 2|z_1| = 2R$

נסה:

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 20$$

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

אלכסוני הריבוע מאונכים לכן נלכד ולכן יש הפג של  $90^\circ$  בין הקיורים

$$z_1 = 3 + i$$

$$z_2 = z_1 \cdot cis 90 = (3+i)i = 3i - 1$$

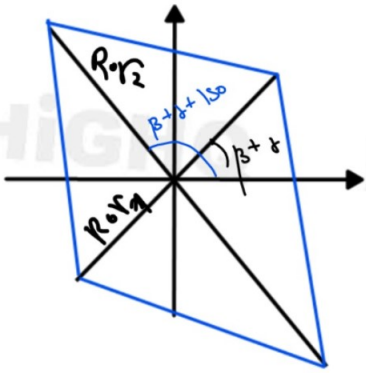
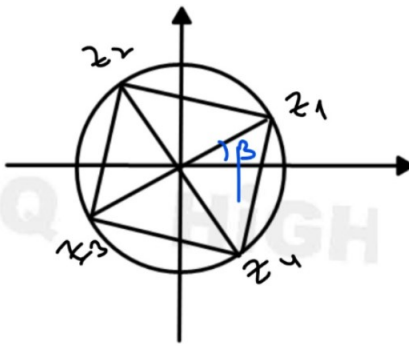
$$z_3 = z_2 \cdot cis 90 = (3i-1)i = -3 - i$$

$$z_4 = z_3 \cdot cis 90 = (-3-i)i = -3i + 1$$

קורקו 3 ים

$(3, 1)$	$(-1, 3)$
$(-3, -1)$	$(1, -3)$

מכפילים ב-  $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$  כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב-  $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$  כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי.  
 הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.  
 נתון:  $r_1 \neq r_2$  חיוביים,  $r_2 > r_1$ .  
 ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.



קודקודים 1 1 3 לסתוקדים  
 כולו 2 ואילו קודקודים 4, 2  
 שווה 2 + 60 + היתארכית  
 שונה של אלקטונים  
 הפרג בין 2 אלקטונים 150  
 אלקטונים חוצים ואלוים זה לזה  
 קיבול מקבילית

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.4 משטח הריבוע שחישבתם בסעיף ב.  
 ה. חשבו את  $r_1 \cdot r_2$ .

שטח המקבילית  $(\frac{a \cdot b \cdot \sin t}{2})$  (שם  $a$  ו- $b$  הם צידי הקבילית ו- $t$  זווית ביניהם)

$$S = 2 \cdot \frac{R \cdot r_2 \cdot R \cdot r_1}{2} \cdot \sin 150 + 2 \cdot \frac{R \cdot r_2 \cdot R \cdot r_1}{2} \cdot \sin 30 =$$

$$= 4 \cdot \frac{R^2 \cdot r_1 \cdot r_2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot r_1 \cdot r_2$$

$$\frac{S}{S_{\text{ריבוע}}} = 1.4 \rightarrow \frac{R^2 \cdot r_1 \cdot r_2}{20} = 1.4$$

$$\frac{10}{20} \cdot r_1 \cdot r_2 = 1.4 \rightarrow r_1 \cdot r_2 = 2.8$$





**שאלה 4**

4. נתונה הפונקצייה  $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$  המוגדרת לכל  $x$ .

- א. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $y$  (אם יש כאלה).
- (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$ .
- (3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$  המוגדרת לכל  $x$ .

- ב. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $g(x)$  המאונכות לציר ה- $y$ .
- (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$  (אם יש כאלה).
- (3) הוכיחו כי  $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$ .
- ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$  ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקצייה  $g(x)$ . נמקו את התשובה.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .
- ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = -1$ .

**פתרון**

נתונה הפונקצייה  $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$  המוגדרת לכל  $x$ .

א. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $y$  (אם יש כאלה).

נסתור בנפרד  $+\infty$  ו  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 2e^x + 1) = \infty \cdot e^\infty - 2 \cdot e^\infty + 1 = \infty$$

אין צביון

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x + 1) = \frac{\infty}{e^\infty} - \frac{2}{e^\infty} + 1 = 1$$

$x$  פונקציה אסימטרית יורדת  
אכן  $\frac{\infty}{e^\infty} \rightarrow 0$

אסימטרית אסימטרית:

$y=1$  ;  $x < 0$

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$ .

צביון  $x=0$

$$y = 0 \cdot e^0 - 2 \cdot e^0 + 1 = -1$$

$(0, -1)$

$$f(x) = xe^x - 2e^x + 1$$

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

$$f(1) = 1 \cdot e^1 - 2 \cdot e^1 + 1 = 1 - e$$

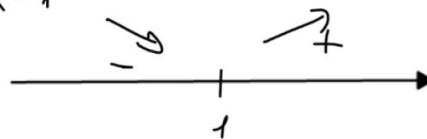
$(1, 1-e)$  Min

יש לי את הפונקציה

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x - 2 \cdot e^x = x \cdot e^x - e^x$$

$$e^x(x-1) = 0$$

$\neq 0 \swarrow$   $\searrow x=1$

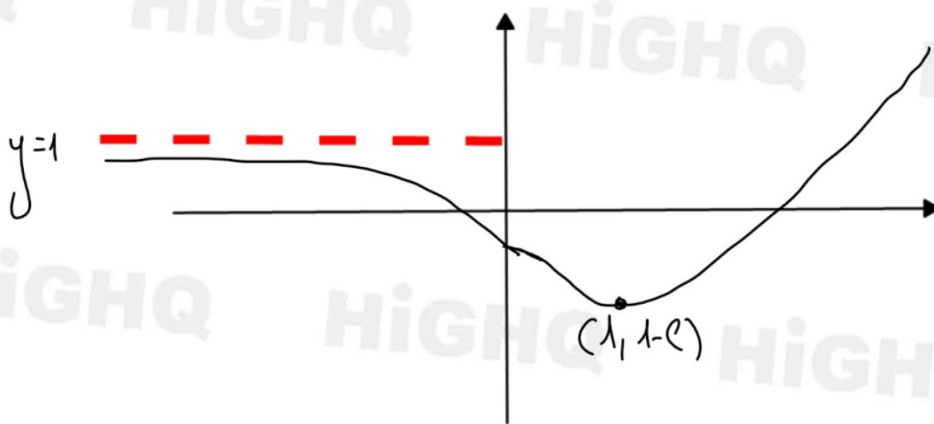


$$f'(0) = (-) < 0$$

$$f'(2) = (+) > 0$$

הפונקציה עולה  $\delta$   $x > 1$   
 הפונקציה יורדת  $\delta$   $x < 1$

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .



נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$  המוגדרת לכל  $x$ .

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לציר ה- $y$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x / e^x}{e^x-x / e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{1 - \frac{x}{e^x}} = \frac{0 - 1}{1 - \frac{\infty}{\infty}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{e^x - x} = \frac{1 - \frac{1}{e^{-\infty}}}{\frac{1}{e^{-\infty}} - (-\infty)} = 0$$

אסימטות אנכיות	
$y = -1$	$x > 0$
$y = \infty$	$x < 0$

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$  (אם יש כאלה).

$$g(x) = \frac{1 - e^x}{e^x - x}$$

$y$  נ"ב נ"ל:  $g(0) = \frac{1-1}{1-0} = 0$  (0,0)

$x$  נ"ב נ"ל:  $0 = \frac{1 - e^x}{e^x - x} \rightarrow 1 - e^x = 0 \rightarrow x = 0$

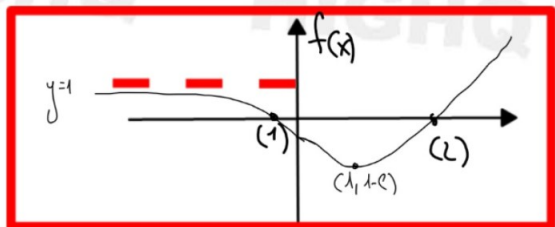
קיימת נק' חיתוך

(3) הוכיחו כי  $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$

$$g'(x) = \frac{-e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(1 - e^x)}{(e^x - x)^2} = \frac{-e^{2x} + xe^x - e^x + e^{2x} + 1 - e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{x \cdot e^x - 2e^x + 1}{(e^x - x)^2} = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$$

היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה  $g(x)$ . נמקו את התשובה.

$$g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$



כ"א כי נק' חיתוך של  $f(x)$  מהחיתוך של  $g(x)$  מהחיתוך של  $g(x)$

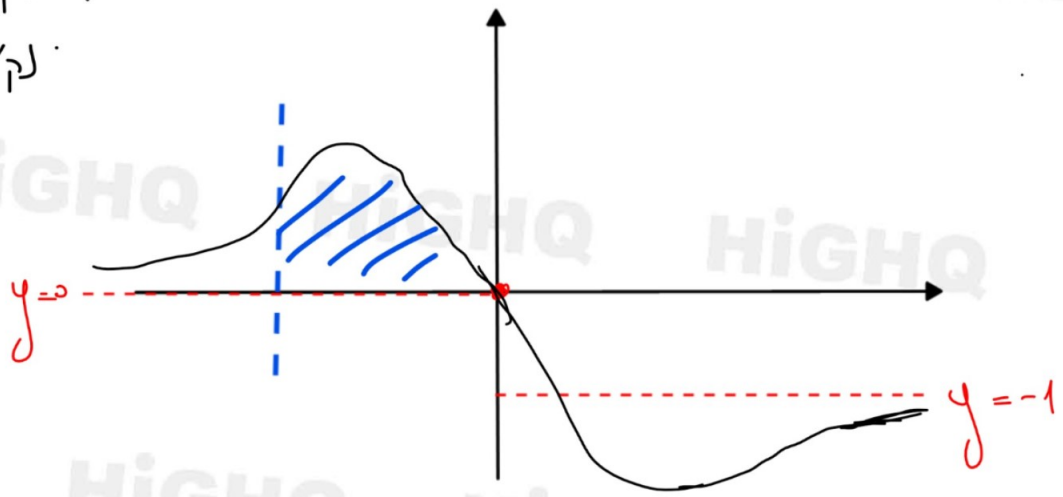
אם ישנן 2 נק' יו"בין:

(1) נק' מקסימום - אם  $f(x) > 0$  משלילית

(2) נק' מינימום - אם  $f(x) < 0$  משלילית



$x < 0$  Max  $\int$  \*  
 $x > 0$  Min  $\int$  .



$$S = \int_{-1}^0 \left( \frac{1-e^x}{e^x-x} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{-u'}{u} dx = \left( -\ln|e^x-x| \right) \Big|_{-1}^0$$
$$= -\ln|e^0-0| + \ln\left|\frac{1}{e}+1\right| = \ln\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$ .

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
 (3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגה.  
 (4) קרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב.  $f'(x)$  היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .  
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  המאונכות לצירים.  
 (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).  
 (4) קרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.  
 ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = e^{f(x)}$  המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה  $f(x)$ .  
 (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבעו את סוגה.  
 (2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $g(x)$ .  
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה  $y = f'(x) \cdot g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = -4$  ו- $x = -3$ .


**פתרון**

נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ת.ה :

$$x^2 - 3 > 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$$


ת.ה ;  $x < -\sqrt{3}$  או  $x > \sqrt{3}$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

אסימפטוטה אנכית - אין ← אצבוק  $x \rightarrow \infty$  הימנית לא שטגור  $\infty$   
 אסימפטוטה אנכית :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} (x + \ln(x^2 - 3)) = \sqrt{3} + \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} (x + \ln(x^2 - 3)) = \sqrt{3} + \ln(0^+) = -\infty$$

אצבוק :  $x \rightarrow \sqrt{3}^-$

$x = -\sqrt{3}$  ,  $x = \sqrt{3}$  אסימפטוטה אנכית

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$$

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגה.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2-3} \cdot (2x) = 1 + \frac{2x}{x^2-3}$$

$$1 + \frac{2x}{x^2-3} = 0 \quad | \cdot (x^2-3) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

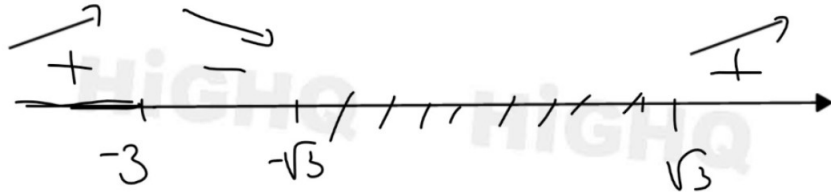
$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3$$

$$x = 1$$

נסו, נסו  
דג'יה

(אפשר לא להיות יחס אמננה כי הוא חיובי תמיד ולכן לא מלביש  
על סימן הנצרות)



$$f'(-4) = (-)(-) > 0$$

$$f'(-2) = (+)(-) < 0$$

$$f'(5) = (+)(+)$$

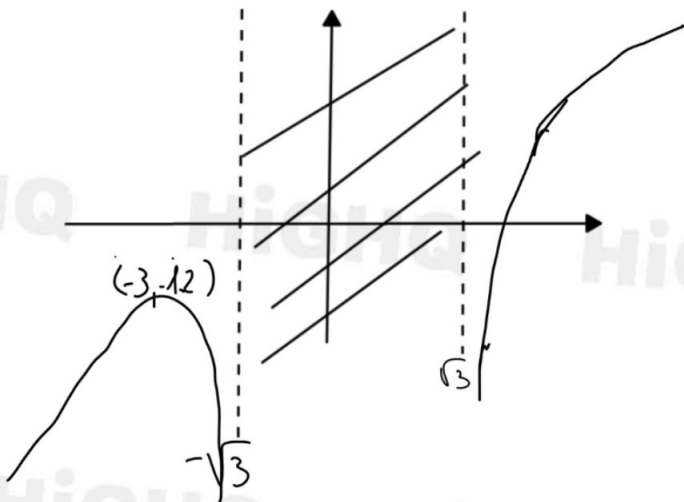
$$\begin{array}{|c|} \hline (x+3)(x-1) \\ \hline \text{כאן} \\ \hline \end{array}$$

מכאן לעיור  $y$

$$f(-3) = -3 + \ln(9-3) = -3 + \ln 6 \approx -1.208$$

$$(-3, -3 + \ln 6) \text{ Max}$$

(4) סרטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .



$f'(x)$  היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3}$$

$x \neq \pm\sqrt{3}$  הינן נקודות שבהן היכן שלמולן נרית הפנ' המקויר  
ובין תיה נכא א  $x < -\sqrt{3}$

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  המאונכות לצירים.

אל כית:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \frac{+}{0^+ \cdot (+)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \frac{+}{0^- \cdot (+)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \frac{-}{(-) \cdot (0^+)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \frac{-}{(-) \cdot (0^-)} = -\infty$$

$x = \sqrt{3}$ $x = -\sqrt{3}$	אל כית
-----------------------------------	--------

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3} \stackrel{\text{אל כית}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{3}{\infty}} = 1$$

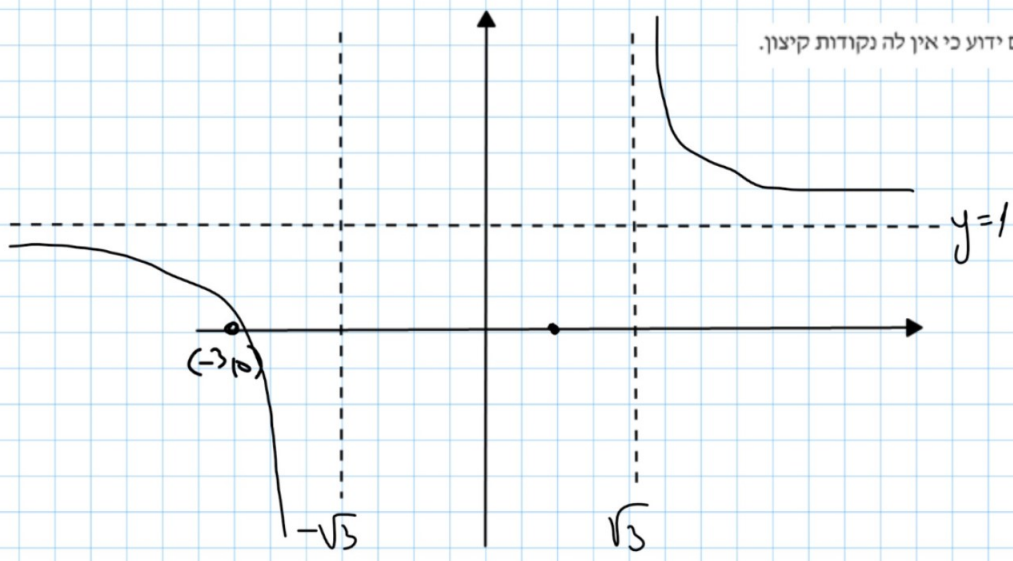
$y = 1$	אל כית
---------	--------

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3}$$

\* נק' היתוך עם ציר x של  $f(x)$  הם נק' קיצון של  $f(x)$   
 ולכן היתוך  $(3, 0)$

\* אין חיתוך עם ציר y, כי היסוד לא מתקבל שם

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.



$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3}$$

הגננה חיובי תמיד קבוע  
 יתיה, ואילו הגננה  
 מהווה פיתולה אחי"כר



אם סמך ליה נפרטט גרף  
 \* ניתן לבדוק אם הם נק' חיתוך

נתונה הפונקצייה  $g(x) = e^{f(x)}$  המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה  $f(x)$ .  
 ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $g(x)$ , וקבעו את סוגה.

$$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$\neq 0$                        $f'(x) = 0$

נק' קיצון של  $g(x)$  הם נק' הקיצון של  $f(x)$   
 חלק  $\text{Max}(-3, -3 + \ln 6)$ , תחומי גננה/יחידה של  $g(x)$   
 למהים  $f(x)$  כי  $f'(x) < 0$  עכס x

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

$$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$e^{f(x)} > 0$  לכל  $x$

ולכן יתן  $f'(x)$  קובץ את סימן הנגזרת

$x < -3$	$  $	$x > \sqrt{3}$	ת:אלייה
$-3 < x < -\sqrt{3}$			ת:ירידה

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה  $y = f'(x) \cdot g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = -4$  ו- $x = -3$ .

$$y = f'(x) \cdot g(x) \quad -4 < x < -3$$

$g(x)$  חיובית לכל  $x$  בתיה

$f'(x)$  חיובית בתחום הנ"ל

ולכן הסוג  $y$  נמצאת מעל ציר  $x$

$$S = \int_{-4}^{-3} f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} \Big|_{-4}^{-3} = e^{f(-3)} - e^{f(-4)} = e^{-3+\ln 6} - e^{-4+\ln 3} = \frac{6}{e^3} - \frac{3}{e^4} \approx 0.0606$$

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$$

$$f(-4) = -4 + \ln(16-3) = -4 + \ln 13$$

$$S = 0.0606$$