פתרון בגרות 582 מועד ב קיץ 2022

שאלה 1

1. נתונות הנקודות $A(-5, 4)$ ו־ $B(0, -1)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה־ x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב־ F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה־ x עובר במוקד השמאלי של האליפסה.

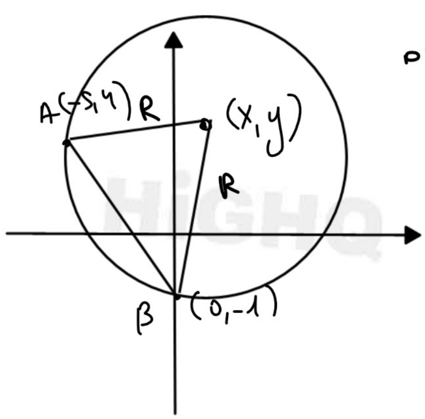
הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו־ T, ואת המעגל M בנקודות K ו־ L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.

פתרון

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.



נסמן את מרכז המעגל כ (x,y) ונשווה בין 2 הרדיוסים

$$R^2=R^2$$

$$(x+5)^2+(y-4)^2=x^2+(y+1)^2$$

$$x^2+10x+25+y^2-8y+16=x^2+y^2+2y+1$$

$$10x-10y+40=0 \quad /:10$$

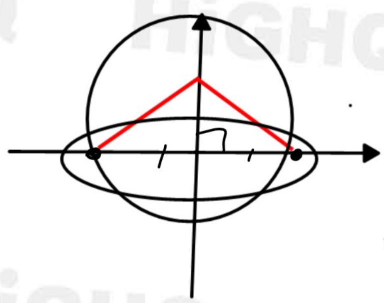
$$\boxed{x-y+4=0}$$

המקום הגיאומטרי הוא ישר

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה־ x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.



אם האליפסה הינה קנונית, זה מצביע על כך שמרכז המעגל צריך להיות על ציר y כי ישר היוצא ממרכז המעגל מהווה אנך אמצעי במשולש שווה שוקיים

$x=0$, נציב במקום הגיאומטרי מסעיף קודם

$$0-y+4=0 \rightarrow y=4$$

לכן מרכז המעגל $(0,4)$

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

$$2a=2R$$

נמצא את R, ניקח את נק' B מסעיף א ונמצא את R

$B=(0,-1)$

$$R=\sqrt{0^2+5^2}=5$$

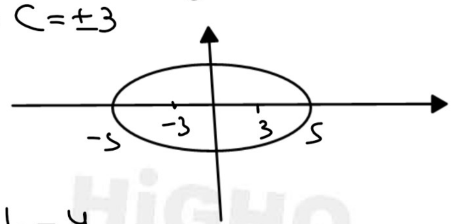
$$a=5$$

נמצא את מוקדי האליפסה כנתון שהמוקד מהווה את נק' חיתוך של המעגל עם ציר x

משוואת מעגל $x^2+(y-4)^2=25$

נציב $y=0$

$x=\pm 3 \Rightarrow c=\pm 3$



נמצא את b

$a^2=b^2+c^2$

$b^2=a^2-c^2=25-9 \Rightarrow b=4$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ $\longrightarrow$

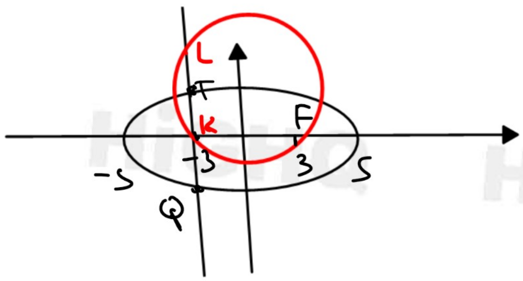
ולכן משוואת האליפסה

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

נסמן ב־ F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה־ x עובר במוקד השמאלי של האליפסה.

הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו־ T, ואת המעגל M בנקודות K ו־ L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.



נמצא את T, Q, נציב $x=-3$ במשוואת האליפסה

$$\frac{9}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

$\frac{y^2}{16}=\frac{16}{25} \rightarrow y=\pm\frac{16}{5}$

$T\left(-3,\frac{16}{5}\right)$ $Q\left(-3,-\frac{16}{5}\right)$

נמצא את K, L נציב $x=-3$ במשוואת מעגל

$9+(y-4)^2=25 \rightarrow (y-4)^2=16$

$y-4=\pm 4 \rightarrow y=8$, $y=0$

ולכן

$K(-3,0)$

$L(-3,8)$

$$\frac{S_{\Delta KLF}}{S_{\Delta TQF}}=\frac{\frac{KL\cdot KF}{2}}{\frac{TQ\cdot KF}{2}}=\frac{KL}{TQ}=\frac{y_L-y_K}{y_T-y_Q}=\frac{8}{\frac{32}{5}}=\frac{5}{4}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta KLF}}{S_{\Delta TQF}}=\frac{5}{4}}$$

שאלה 2

2. נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\overrightarrow{OA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{OC}=\underline{w}$.

נתון: $\sphericalangle AOB=\sphericalangle BOC=\sphericalangle COA=90^{o}$, $|\underline{w}|=|\underline{v}|=|\underline{u}|$.

הנקודה H מקיימת $\overrightarrow{OH}=t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w}$. t , s ו־ k הם פרמטרים.

נתון כי $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי $t=s=k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC .

ג. הביעו באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

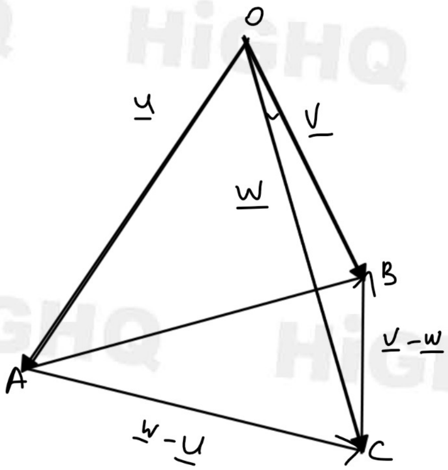
ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה־ x , הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה־ y , והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה־ z .

נתון: $|\underline{u}|=a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP .

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC .

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $57\frac{1}{6}$. חשבו את a .



פתרון

- נתון כי $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי $t=s=k$.

$\overrightarrow{OH}=t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w}$

$\underline{u}\perp\underline{w}\perp\underline{v}$

$\Downarrow$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0$

$\underline{w}\cdot\underline{v}=0$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0$

אם $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס הפירמידה, אזי הוא מאונך לוקטורים הפורשים את המישור ABC

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OH}=0$

$(\underline{w}-\underline{u})(t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w})=0$

$k|\underline{w}|^2-t|\underline{u}|^2=0 \Rightarrow k=t$

נתון $|w|=|u|$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OH}=0$

$(\underline{v}-\underline{w})(t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w})=0$

$s\cdot|\underline{v}|^2-k\cdot|\underline{w}|^2=0 \Rightarrow s=k$

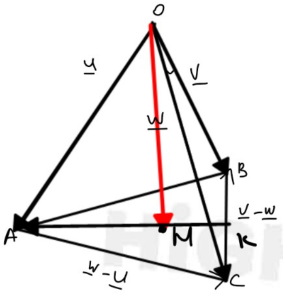
נתון $|w|=|v|$

ולכן

$s=t=k$

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.



נסמן K אמצע CB ו AK תיכון במשולש הנ"ל

דרך נק' M

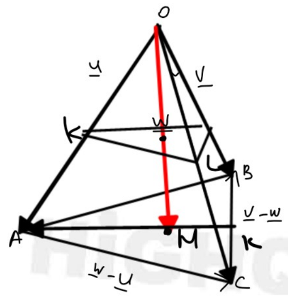
$\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\underline{w}-\underline{v})+(\underline{u}-\underline{w})$

$\overrightarrow{MA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KA}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}-\underline{w}\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{w}\right)$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OM}=\underline{u}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{w}\right)=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{v}$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{v}$



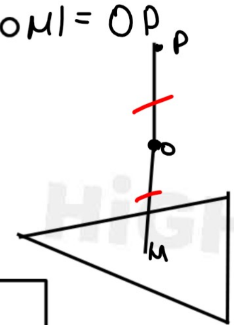
הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC .

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

עפ"י הנתונים ניתן לראות כי צלעות בסיס המשולש שווים וגם מקצועות הפירמידה שווים ולכן הפירמידה ישרה ומשוכללת, ולכן OM מהווה גם את גובה

← ל 2 הפירמידות אותו בסיס ולכן, יחס הגבהים הוא כיחס הנפחים $\left(V=\frac{S\cdot h}{3}\right)$

$$2|OM| = OP$$

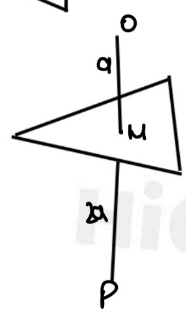


קיימות 2 אפשרויות

I) מצב

$$\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$$



II) מצב

$$\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OM} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

תשובה

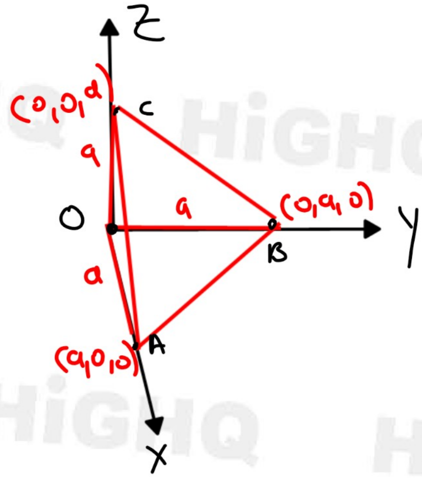
$$\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{OP} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה־ x , הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה־ y , והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה־ z .

נתון: $|\underline{u}| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP .



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(0,0,a) + \frac{1}{3}(0,a,0) + \frac{1}{3}(0,0,a)$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(a,a,a)$$

$$\overrightarrow{OP}: \quad \vec{x} = (0,0,0) + t\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right) = t(a,a,a)$$

ניתן לכפול פי 3 ← כי $\overrightarrow{OM}$ מהווה וקטור כיוון

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC .

$\overrightarrow{OM}$ מהווה אנך למישור ולכן $\underline{n} = \overrightarrow{OM} = (a,a,a)$

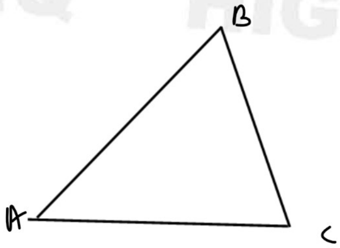
$$ax + ay + az + d = 0$$

נציב נק' $A(a,0,0)$ במשוואת המישור

$$a^2 + d = 0 \quad \rightarrow d = -a^2$$

משוואת מישור ABC $\boxed{x + y + z - a = 0}$

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $57\frac{1}{6}$. חשבו את a.



$$AB = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a \rightarrow S_{ABC} = \frac{(\sqrt{2}a)^2 \cdot \sin 60}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

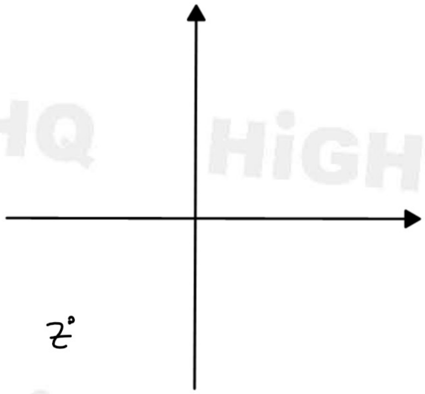
$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+a^2+a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}a$$

* ΔABC שווה צלעות

$$V = \frac{S_{ABC} \cdot OM}{3}$$

$$V = \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} a}{3} = \frac{a^3}{6}$$

$$\frac{a^3}{6} = 57\frac{1}{6} \Rightarrow a = 7$$



שאלה 3

3. המספר $z = R(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α .

נתון: $|4iz| - \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$.

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו־C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו־$\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פתרון

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α .

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\alpha = 120° + 180k$$

נעבור להצגה פולרית

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = cis(-60 + 180k)$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{r\,cis\,\alpha}{r\,cis(-\alpha)} = cis(2\alpha)$$

ולכן

$$cis(2\alpha) = cis(120 + 180k)$$

$$2\alpha = 120 + 180k$$

$$\alpha = 60 + 90k$$

α ברביע (3) ולכן $k = 2$

$$\alpha = 240°$$

נתון: $|4iz| - \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$.

ב. מצאו את R .

$|z| = r$ עבור מס מדומה

$$4iz = 4cis90 \cdot R\,cis\,\alpha = 4R\,cis(\alpha + 90)$$

$$|4iz| = 4R$$

$$\frac{\bar{z}}{i} = \frac{R\,cis(-\alpha)}{i} = R\,cis(-\alpha - 90) \rightarrow \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| = R$$

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 1 \quad (R \text{ מצמצם})$$

ולכן:

$$4R - R - 1 = 8$$

$$3R = 9 \Rightarrow R = 3$$

$$\boxed{\frac{z}{\bar{z}} = cis120}$$

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

$$z = 3cis240$$

$$w^9 = \frac{z^3}{27} = \frac{27 \cdot cis(0)}{27} = 1$$

$$w_k = 1\,cis\left(\frac{360k}{9}\right) = w_k = cis(40k)$$

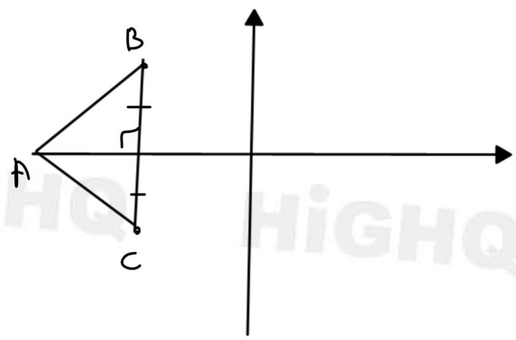
עבור $k=3$

$W_3 = cis\,120$

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו־C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו־ $\frac{\bar{z}}{z}$.
קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).



ראינו כבר כי $\frac{z}{\bar{z}} = cis120$

$$\frac{\bar{z}}{z} = cis(-240-240) = cis(-120)$$

$$B \to cis(120) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$C \to cis(-120) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ABC הוא משולש שווה צלעות ולכן ציר x מהווה את גובה ותיכון, קודקוד A חייב להיות על ציר x

$z_A \to$ ממשי טהור

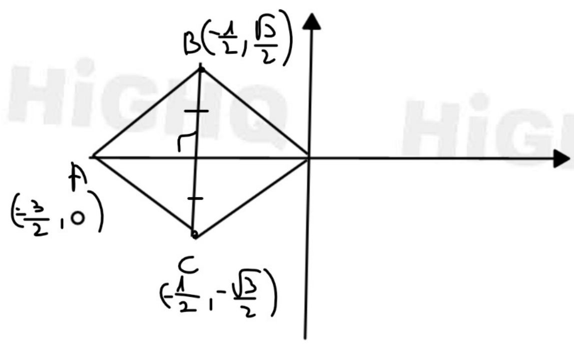
$$z_A = z+k \to 3\cos 240 + \underbrace{i\cdot 3\sin 240 + k}_{0}$$

ולכן

$$k = -3i\sin 240 = +\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\boxed{k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).



קיבלנו דלתון (אלכסונים מאונכים)

ולכן

$$S = \frac{OA \cdot BC}{2} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

שאלה 4

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x, a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את התחום שבו הפונקצייה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה־ x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a.

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הפונקצייה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקצייה $g(x)$ $(g'(x) = f(x))$.

ד. **(1)** מהו תחום העלייה של הפונקצייה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב־ B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקצייה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה.

נתון כי שיעור ה־ y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

פתרון

$f(x) = x^2e^{a-x^3}$

א. **(1)** מצאו את התחום שבו הפונקצייה $f(x)$ חיובית.

$f(x) = x^2 \cdot e^{a-x^3}$

$0 < e^{a-x^3}$ לכל x

$0 < x^2$ לכל x פרט ל $x \neq 0$

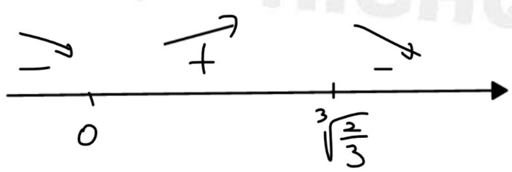
ולכן $\boxed{x \neq 0}$

(2) מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$f'(x) = 2x \cdot e^{a-x^3} + x^2 \cdot e^{a-x^3}(-3x^2) = 0$

$x \cdot e^{a-x^3}(2 - 3x^3) = 0 \rightarrow x = 0$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

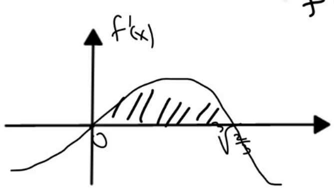


$e^{a-x^3} > 0$ לכל x

$f'(-1) = (-)(+)(+) < 0$

$f'(0.5) = (+)(+)(+) > 0$

$f'(3) = (+)(+)(-)$



ולכן
Min נק' $x = 0$
Max נק' $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה־ x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a.

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} f'(x)\,dx = f\left(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right) - f(0) = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

נציב ב $f(x) = x^2e^{a-x^3}$

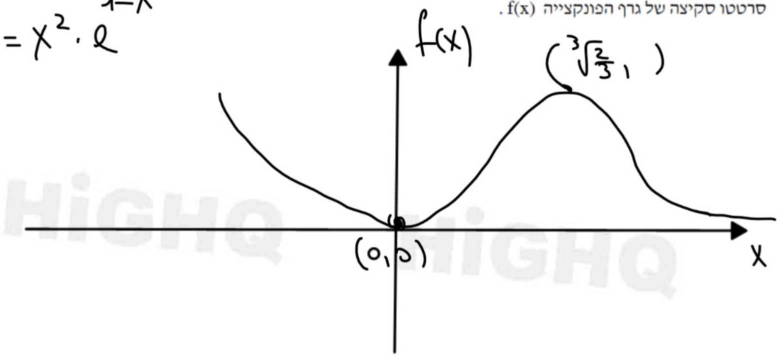
$$\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} e^{a-\frac{2}{3}} - 0 = \cancel{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow e^{a-\frac{2}{3}} = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$$f(x)=x^2\cdot e^{1-x^3}$$

קיימת אסימפטוטה אופקית עבור $x\to+\infty$



הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ $(g'(x) = f(x))$.

ד. **(1)** מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

ד. (1) עבור $f(x)>0$ ← $g(x)$ עולה ולכן $g(x)$ עולה לכל x פרט $x=0$

כלומר $g(x)$ עולה עבור $x\neq 0$

(2) נק' קיצון של $f(x)$ מהוות נק' פיתול של $g(x)$ ולכן ל $g(x)$ יש 2 נק' פיתול

נסמן ב־ B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה.

נתון כי שיעור ה־ y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

$g(x)$ עולה לכל x פרט ל $x=0$ ולכן נק' הפיתול בעלת y גבוה יותר $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\int x^2\cdot e^{1-x^3}dx=\int -\frac{u'(x)}{3}e^{u(x)}dx=-\frac{e^{1-x^3}}{3}+c$$

$$g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)=\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}\implies \frac{-e^{1-\frac{2}{3}}}{3}+c=\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$

$$c=\frac{e}{3}-\frac{\sqrt[3]{e}}{3}+\frac{1}{3}e^{1/3}=\frac{e}{3}$$

$$\boxed{g(x)=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+\frac{e}{3}}$$

שאלה 5

5. נתונה פונקצייה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקצייה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקצייה היא אי־זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה, ולפונקצייה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \ell n\,(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

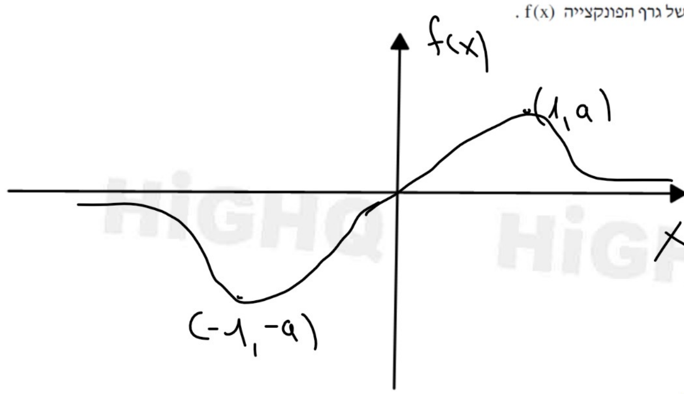
(2) האם הפונקצייה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל $\int_{-5}^{t} g(x)dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים $\int_{-5}^{5} g(x)dx = 2 \cdot \int_{-5}^{t} g(x)dx$? נמקו.

פתרון

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.



פונ' אי זוגית

$f(x) = -f(x)$

נתונה הפונקצייה $h(x) = \ell n\,(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

ת.ה של $\ln(f(x))$ עבור $f(x)>0$ לכן $h(x)$ מוגדר ל $x>0$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

$$\lim_{x\to 0} \ln(f(x)) = \ln(0^+) = -\infty$$

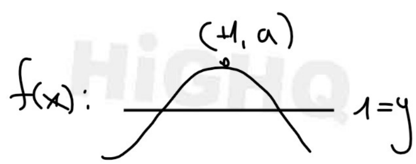
אסימפטוטה אנכית $x=0$

$$\lim_{x\to \infty} \ln(f(x)) = \ln(0^+) = -\infty$$

אין אסימפטוטה אופקית

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

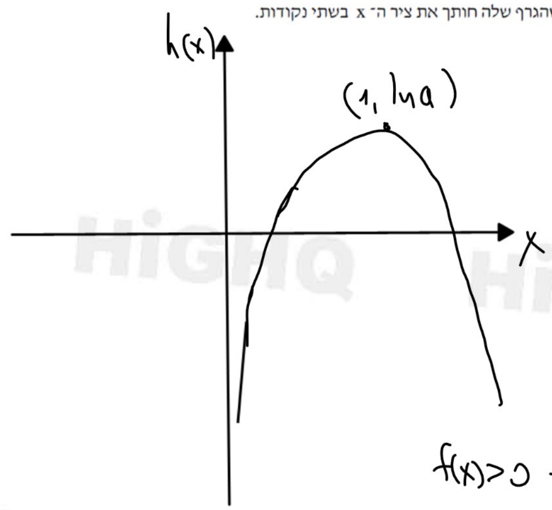
$$h(x)=0 \Rightarrow \ln(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$$



$a>1$

כדי שהישר $y=1$ יחתוך את $f(x)$ ב 2 נק', הוא צריך להיות מתחת לנק' קיצון

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.



$h(x) = \ln(f(x))$

$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

לכן ק"מ נק' קיצון זהה בשיעור ה x לפונ' $f(x)$ ותחומי עלייה וירידה זהים עבור $f(x)>0$

נתון: $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. **(1)** מצאו את הפונקציה $g(x)$.

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \frac{6x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{3\cdot 2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{3\cdot f'(x)}{f(x)}\,dx = 3\ln(1+x^2) + c$$

נציב $g(0)=0$

$$g(0) = 3\ln(1) + c = 0 \implies \boxed{c=0}$$

$$\boxed{g(x) = 3\ln(1+x^2)}$$

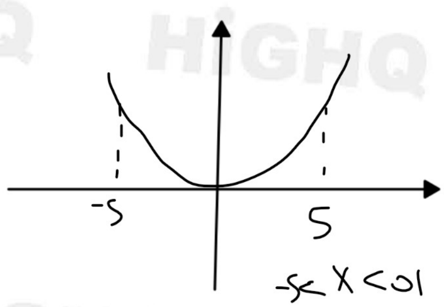
(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמקו.

$$g(-x) = 3\ln(1+x^2) = g(x)$$

$g(x)$ זוגית

לפניכם האינטגרל $\int_{-5}^{t} g(x)\,dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים $\int_{-5}^{5} g(x)\,dx = 2\cdot\int_{-5}^{t} g(x)\,dx$? נמקו.



$g(x)$ פונ' זוגית ולכן סימטרית סביב ציר y

(וגם השטחים סימטרים עבור $0<x<5$ ו $-5<x<0$)

לכן $t=0$