פתרון בגרות 581 מועד ב קיץ 2022

שאלה 1

1. ארבעה רצים משתתפים במרוץ שליחים במסלול שאורכו 1,440 מטר. המסלול מחולק ל־ 4 מקטעים שווים ובתחילת כל מקטע עומד אחד מן הרצים.

כאשר נשמעת יריית הזינוק הרץ הראשון יוצא לדרך. מייד כשהוא מגיע לסוף המקטע הראשון, הרץ השני יוצא לדרך, וכך הלאה עד שהרץ הרביעי מגיע לסוף המקטע שלו.

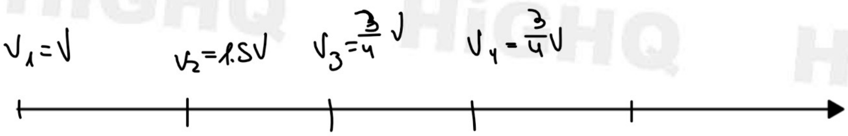
מהירות הרץ השני גדולה פי 1.5 ממהירות הרץ הראשון. מהירות הרץ השלישי קטנה פי 2 ממהירות הרץ השני, ומהירות הרץ הרביעי שווה למהירות הרץ השלישי. המהירות של כל אחד מן הרצים קבועה לאורך המקטע שלו.
ארבעת הרצים השלימו יחד את המסלול כולו בשלוש דקות ו־ 54 שניות סך הכול.

א. מצאו את מהירות הריצה של כל אחד מן הרצים.

הרץ השלישי והרץ הרביעי התאמנו כדי להגדיל את מהירות הריצה שלהם.
כעבור זמן שוב השתתפו ארבעת הרצים במרוץ שליחים, באותו המסלול. כל אחד מהם רץ באותו מקטע שבו רץ בפעם הקודמת. סך זמן הריצה של הרץ השלישי והרץ הרביעי היה גדול פי 1.4 מסך זמן הריצה של שני הרצים הראשונים.
הרץ הראשון והרץ השני רצו באותה המהירות שבה רצו בפעם הקודמת.
הרץ השלישי עבר כל 100 מטר ב־ 5 שניות פחות מן הרץ הרביעי.

ב. (1) מצאו בכמה שניות זמן הריצה של הרץ השלישי קטן מזמן הריצה של הרץ הרביעי.
(2) האם כל אחד משני הרצים האלה, השלישי והרביעי, הגדיל את מהירות הריצה שלו? נמקו את התשובה.

$\frac{3}{2}$



פתרון

א. מצאו את מהירות הריצה של כל אחד מן הרצים.

אורכו של כל מקטע

$$X=\frac{1440}{4}=360\ m$$

נביע את מהירות הרצים בעזרת הרץ הראשון
נסכום את כל הזמנים ונשווה ל $3min+54sec$

$$\frac{360}{V}+\frac{360}{1.5V}+\frac{360}{\frac{3}{4}V}+\frac{360}{\frac{3}{4}V}=234$$

$$\frac{360}{V}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)=234$$

$$\frac{360}{V}\cdot\frac{13}{3}=234$$

$$\frac{120}{V}=18 \rightarrow V=\frac{20}{3}\ \frac{m}{s}$$

לכן המהירות הן:

1. $V_1=\frac{20}{3}\ \frac{m}{s}$
2. $V_2=10\ \frac{m}{s}$
3. $V_3=5\ \frac{m}{s}$
4. $V_4=5\ \frac{m}{s}$

הרץ השלישי והרץ הרביעי התאמנו כדי להגדיל את מהירות הריצה שלהם.
כעבור זמן שוב השתתפו ארבעת הרצים במרוץ שליחים, באותו המסלול. כל אחד מהם רץ באותו מקטע שבו רץ בפעם הקודמת. סך זמן הריצה של הרץ השלישי והרץ הרביעי היה גדול פי 1.4 מסך זמן הריצה של שני הרצים הראשונים.
הרץ הראשון והרץ השני רצו באותה המהירות שבה רצו בפעם הקודמת.
הרץ השלישי עבר כל 100 מטר ב־ 5 שניות פחות מן הרץ הרביעי.

ב. (1) מצאו בכמה שניות זמן הריצה של הרץ השלישי קטן מזמן הריצה של הרץ הרביעי.

נחשב את זמן הריצה של 1 ו 2

$$t_1=\frac{360}{V_1}=\frac{360}{\frac{20}{3}}=54\ sec$$

$$t_2=\frac{360}{V_2}=\frac{360}{10}=36\ sec$$

$$t_1+t_2=90\ sec$$

לכן:

$$t_3+t_4=126\ sec$$

נבדוק כמה פעמים 100m נכנס ב 360m ⇐ 3.6 פעמים, ואת התשובה נכפיל בהפרש זמנים
$5\cdot3.6=18\ sec$

הרץ השלישי רץ 18 שניות פחות במקטע שלו לעומת הרץ הרביעי

(2) האם כל אחד משני הרצים האלה, השלישי והרביעי, הגדיל את מהירות הריצה שלו? נמקו את התשובה.

$t_3+t_4=126sec$

$t+t+18=126$

$2t=108$

$t=54sec \rightarrow t_3=54sec \qquad t_4=72sec$

⇐ מהירותו של ה 3 גדלה כי לפני הריצה שלו שווה ל 1

$\frac{360}{72}=5\frac{m}{s}$ ⇐ מהירותו של הרביעי לא השתנתה.

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור 2k האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $12{,}288 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 3{,}072$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 6$.

ג. **(1)** קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k .

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין־סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי־זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

פתרון

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ נעזר בהצבת האיבר הכללי

$$a_1 \cdot a_{2n} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{2n-1} = \underbrace{a_1 \cdot q^n}_{a_{n+1}} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} = a_n \cdot a_{n+1}$$

בעבור 2k האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $12{,}288 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 3{,}072$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

$a_1, \ldots, \underbrace{a_n, a_{n+1}}, \ldots, a_{2n}$

2 איברים אמצעיים

נשתמש בהוכחה מסעיף א

$a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$

$\cancel{a_1} \cdot a_{2n} = 12288 \cdot \cancel{a_1}$

$a_{2k} = 12{,}288$, כמו כן נתון $3{,}072 = a_{2k-2}$

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = q^2 \Rightarrow \frac{12288}{3072} = q^2 \Rightarrow q^2 = 4$$

$$\boxed{q = \pm 2}$$

נתון: $a_1 = 6$.

ג. **(1)** קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k .

(1) אם $a_1=6$, אזי

a_1 וכל $a_{2k}>0$ ולכן הסדרה חיובית ⇐ גם איברים

במקומות זוגיים ואי זוגיים חיוביים ולכן $q=2$ והסדרה עולה

* ניתן גם לומר

$$a_n\cdot a_{n+1}=a_{2n}\cdot a_1$$

$$a_n\cdot a_{n+1}=12288\cdot 6>0$$

מכפלת 2 איברים סמוכים חיובית, ולכן חייבים להיות באותו סימן כמו a_1 + ולכן $q=2$

והסדרה עולה

(2)

$$a_{2k}=12288$$

$$a_1\cdot q^{2k-1}=12288$$

$$6\cdot 2^{2k-1}=12288$$

$$2^{2k-1}=2048=2^{11}$$

$$2k-1=11$$

$$2k=12$$

$$k=6$$

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין־סופית B באופן הזה: ... , $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

נסתכל על איבר כללי

$$\frac{1}{a_1}\cdots\cdots\frac{1}{a_n},\ \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$$

ולכן הסדרה הנדסית

שמנתה $q^*=\frac{1}{2}$

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי־זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

גם הסדרה C , הנדסית $\frac{1}{a_{2k}}$ ו $-\frac{1}{a_{2k-1}}$

$$\frac{\frac{1}{a_{2k}}}{-\frac{1}{a_{2k-1}}} = -\frac{a_{2k-1}}{a_{2k}} = -\frac{1}{q} = -\frac{1}{2}$$

לכן C סדרה הנדסית מתכנסת ($-1<q^*<1$)

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1^* = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{6} \\ q^* = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

$$S = \frac{a_1^*}{1-q^*} = \frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{6}\cdot 3}$$

$$\boxed{S = -\frac{1}{9}}$$

שאלה 3

	$\bar{B}$	B	
$1-13p$	$1-14p$	p	A
$13p$	$10p$	$3p$	$\bar{A}$
	$1-4p$	$4p$	

מקרא!

$A \rightarrow$ צעיר

$\bar{A} \rightarrow$ מבוגר

$B \rightarrow$ שולט באנגלית

$\bar{B} \rightarrow$ לא שולט באנגלית

3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.
בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.
בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,
ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $3\frac{1}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.
נסמן ב־ p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{14}$.

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

נתון

$$P(A \cap B) = p$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 3P(A \cap B) = 3p$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 3\frac{1}{3} \cdot P(\bar{A} \cap B) = 3\frac{1}{3} \cdot 3p = 10p$$

פתרון

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

עפ"י הנתונים

$$P(B / \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{3p}{13p} = \frac{3}{13}$$

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

הסתברות ל"הצלחה" בניסוי בודד $p = \frac{3}{13}$

נציב בברנולי

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$n = 3$, $k = 2$

$$P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{13}\right)^1 = 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2197} = \frac{270}{2197}$$

ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

סה"כ כל ההסתברויות במרחב המדגם הוא 1 ולכן

$$P(A \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap B) = 1 - 14p$$

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{14}$.

מתוך ג' $1 - 14p > 0$ וגם $p > 0$

$\Downarrow$

$1 > 14p$

$p < \frac{1}{14}$

ולכן $0 < p < \frac{1}{14}$

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B})$$

$$10p = 1 - 14p \Rightarrow 24p = 1 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{24}}$$

ה. האם המאורעות ”לשלוט באנגלית” ו”להיות מבוגר” תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

נבדוק האם מתקיים

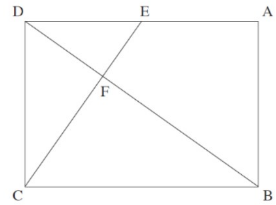
$$P(B)\cdot P(\bar{A}) = P(B\cap\bar{A})$$

$$4\cancel{p}\cdot 13p = 3\cancel{p}$$

$$52\cdot\frac{1}{24} \neq 3$$

לכן המאורעות תלויים

שאלה 4



4. במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.
המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו- BFC באמצעות S.

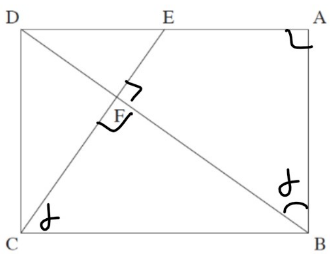
ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן: $DE = a$.

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

פתרון



נתון:
ABCD מלבן
EABF בר חסימה במעגל

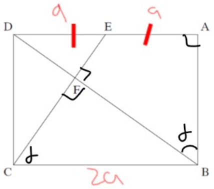
א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

	טענה	נימוק
1.	$\angle A = 90°$	נתון ABCD מלבן
2.	EABF בר חסימה במעגל	נתון
3.	$\angle EFB = 90°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל- $180°$ + טענות 1,2
4.	$\angle CFB = 90°$	סכום זוויות סמוכות $180°$ + טענה 3
5.	$\angle ABF = \alpha$	סימון
6.	$\angle DBC = 90 - \alpha$	סכום זוויות $\angle B = 90°$ + נתון ABCD מלבן
7.	$\angle FCB = 180 - 90 - (90 - \alpha)$ $\angle FCB = \alpha$ $\Downarrow$	סכום זוויות במשולש CFB + טענות 4,6
8.	$\triangle DAB \cong \triangle BFC$	עפ"י משפט דמיון ז.ז + טענות 1,4,5,7

מ.ש.ל. א.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

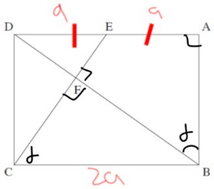


	טענה	נימוק
9.	$\angle ADF = 90 - \alpha$	סכום זוויות במשולש $\triangle DAB$ + 5
10.	$\angle DFE = 90°$ $\Downarrow$	סכום זוויות סמוכות $180°$ + טענה 3
11.	$\triangle DFE \sim \triangle BFC$	עפ"י משפט דמיון ז.ז + טענות 4,7,10,9
12.	$DE = EA = a$ $\Downarrow$	נתון + סימון
13.	$CB = 2a$	צלעות נגדיות במלבן שוות
14.	$\frac{EF}{FC} = \frac{DE}{CB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$	צלעות פרופורציוניות בהתאמה במשולשים דומים + טענות 11 + 12 + 13

מ.ש.ל. ב.

1S + g 1S

נימוק	טענה



נסמן את שטח המשולש DEF ב־ S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו־ BFC באמצעות S.

15. $S_{\triangle DEF} = \frac{DF \cdot EF}{2} = S$ — נתון

16. $S_{\triangle DFC} = \frac{DF \cdot CF}{2} =$ — נוסחת שטח

$\Downarrow$

17. $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DFC}} = \frac{\frac{DF \cdot EF}{2}}{\frac{DF \cdot CF}{2}} = \frac{EF}{CF} = \frac{1}{2}$ — חילוק + טענות 15, 16

$\Downarrow$

$S_{\triangle DFC} = 2S_{\triangle DEF} = 2S$

18. $S_{\triangle CFB} = \frac{BF \cdot CF}{2}$

$\Downarrow$

19. $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle CFB}} = \frac{\frac{DF \cdot EF}{2}}{\frac{BF \cdot CF}{2}} = \frac{DF}{BF} \cdot \frac{EF}{CF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ — חילוק + טענות 8+ 15

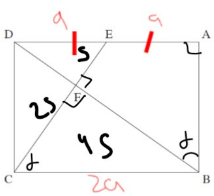
$\Downarrow$

$4S_{\triangle DEF} = S_{\triangle CFB}$

$\Downarrow$

$S_{\triangle CFB} = 4S$

מש.ל ג



ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

20. $S_{\triangle DAB} = S_{\triangle DBC} = 2S + 4S = 6S$ — האלכסון DB מחלק את המלבן ל 2 שטחים שווים + טענות 17, 19

21. $\frac{DB}{CB} = \sqrt{\frac{S_{DAB}}{S_{CFB}}} = \sqrt{\frac{6S}{4S}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ — יחס השטחים במשולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון + טענות 8, 19, 20

מש.ל ד.

נסמן: DE = a.

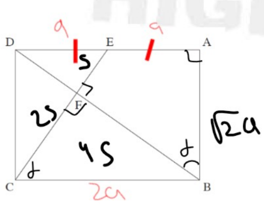
ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

22. $\frac{BD}{CB} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ — יחס הדמיון במשולשים דומים + טענה 8

$\Downarrow$

23. $\frac{BD}{2a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow BD = a\sqrt{6}$ — עפ״י טענות 22 + 13

מש.ל ה.1



(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

24. $BA^2 = DB^2 - AD^2$ — עפ״י משפט פיתגורס

$BA^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$

25. נסתכל על $\triangle EAB$ (החוסם במעגל) — זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר

EB קוטר במעגל החוסם

26. $EB^2 = EA^2 + AB^2 = a^2 + 2a^2$ — עפ״י משפט פיתגורס + טענות 12 + 24

$EB = \sqrt{3}a \Rightarrow R = \sqrt{3}a$

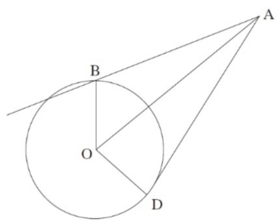
מש.ל ה2

שאלה 5

.5 נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.



נסמן: $\sphericalangle AOD = \alpha$, $\sphericalangle AOB = \beta$.

א. הביעו באמצעות α , β ו־ R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.

נתון: $AB = \sqrt{2}\,R$.

ב. הוכיחו כי $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

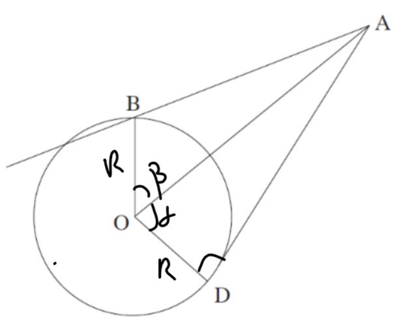
משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו־ β .

/המשך בעמוד 5/

פתרון



א. הביעו באמצעות α , β ו־ R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

נסתכל על המשולש ADO ($\sphericalangle D = 90$)

$$\cos\alpha = \frac{OD}{OA} \rightarrow OA = \frac{OD}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{OA = \frac{R}{\cos\alpha}}$$

(2) אורך הקטע AB.

נסתכל על משולש ΔAOB , עפ"י משפט הקוסינוס

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2\cdot OB\cdot OA\cdot\cos\beta$$

$$AB^2 = R^2 + \frac{R^2}{\cos^2\alpha} - 2\cdot R\cdot\frac{R}{\cos\alpha}\cdot\cos\beta$$

$$AB^2 = R^2\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{AB = R\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}}$$

נתון: $AB = \sqrt{2}\,R$.

ב. הוכיחו כי $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

נציב בסעיף קודם ב $\boxed{AB^2 = R^2\left(1 + \frac{1}{\cos^2} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}\right)}$

$$2\cdot\cancel{R^2} = \cancel{R^2} + \frac{\cancel{R^2}}{\cos^2\alpha} - 2\cdot\cancel{R}\,\frac{\cancel{R}}{\cos\alpha}\cdot\cos\beta \qquad /:R^2$$

$$2 = 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}$$

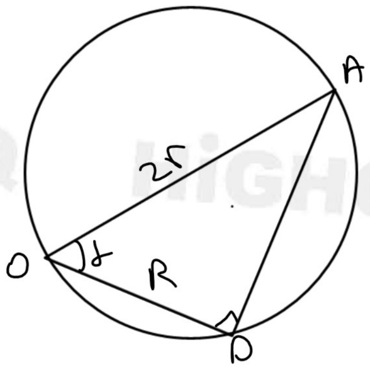
$$\frac{2\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad /\cdot\cos\alpha$$

$$2\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}}$$

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r .

נתון: $\frac{R}{r}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו־ β .



OA מהווה את קוטר המעגל: זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר

לכן

$$\cos\alpha=\frac{R}{2r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{r}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{5}\Rightarrow \alpha=60.67^\circ$$

$$\boxed{\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{19}{25}}$$

נציב ב

$$\cos\beta=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{19}{25}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{5}}=\frac{19}{25}\cdot\frac{5}{2\cdot\sqrt{6}}$$

$$\beta=39.13^\circ$$

שאלה 6

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-36}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. **(1)** מצאו את a .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-4}^{k} g(x)dx = \int_{-2}^{6} h(x)dx$, $k>-4$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

פתרון

$$f(x)=\frac{x^2-36}{\sqrt{x+a}}$$

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ת.ה $x+a>0$

$x>-a$

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. **(1)** מצאו את a .

אם ת.ה לא מהווה אסימפטוטה אנכית הוא יהיה נק' סליקה

ולכן צריך להיות צמצום של $\sqrt{x+a}$

$$f(x)=\frac{(x-6)(x+6)}{\sqrt{x+a}}$$

אם $a>0$ הביטוי $\sqrt{x+a}=\sqrt{x+6}$ לכן $a=6$

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

נשתמש בביטוי הפונ' לאחר הצמצום

$f(x)=(x-6)\cdot\sqrt{x+6}$

ת.ה $x>-6$

חיתוך עם ציר y:

$f(0)=-6\cdot\sqrt{6}$

$(0,-6\cdot\sqrt{6})$

חיתוך עם ציר X

$0=(x-6)\cdot\sqrt{x+6}$

$x=6$ $\qquad \neq 0$

ולכן $(6,0)$

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

$f(x)=(x-6)\cdot\sqrt{x+6}$

$f'(x)=\sqrt{x+6}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}\cdot(x-6)=0 \quad /\cdot 2\sqrt{x+6}$

$2(x+6)+x-6=0$

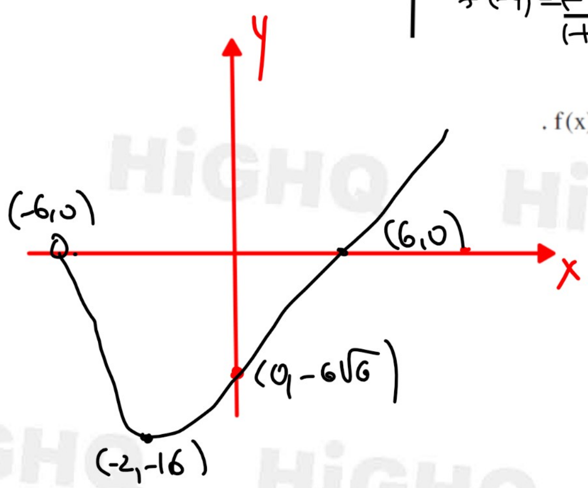
$3x+6=0 \rightarrow \boxed{x=-2}$

-6 − -2 +

$f'(-4)=\frac{(-)}{(+)}<0 \qquad f'(0)=\frac{+}{+}>0$

ולכן $(-2,-16)$
נק' Min

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



$f(-6)=0$

נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

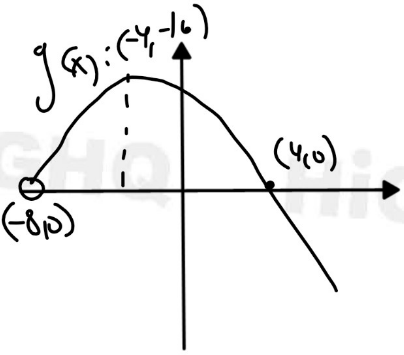
$g(x)$: היא היפוך של $f(x)$ והזזה של 2 יח' שמאלה
ולכן גם ת.ה זז 2 יח' שמאלה
ת.ה: $x>-8$

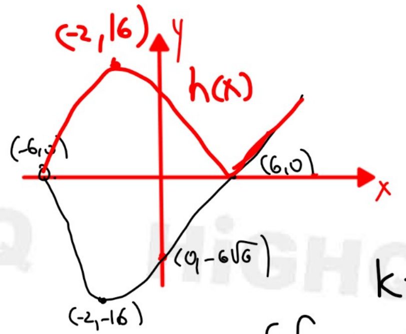
$h(x)$: ל $h(x)$ ו $f(x)$ אותו ת.ה ולכן ת.ה של $h(x)$
$x>-6$

(2) האם שיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

שיעור y של נק' Max של $g(x)$ הוא $+16$ (היפוך של $f(x)$)

ו $h(-2)=|f(-2)|=|-16|=16$ ולכן הערכים שווים





נתון כי $\int_{-4}^{k} g(x)\,dx = \int_{-2}^{6} h(x)\,dx$, $k > -4$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

פונק' $g(x)$ היא מוזזת ב 2
יחידות אופקית ל $f(x)$ ולכן,
כדי שהשטחים יהיו שווים $k=4$
(הזזה של כל גבול היא 2 יח' שמאלה)

שאלה 7

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$, המוגדרת לכל x.

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \le f(x) \le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(2x)$, המוגדרת לכל x.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(g'(x)-f'(x))dx = S$.

הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}(g'(x)-f'(x))dx$. הסבירו את התשובה.

פתרון

תנאי לזוגיות
$f(x)=f(-x)$

$\sin(-x)=-\sin x$
$\cos x=\cos(-x)$

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

$$f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$$

$$f(-x)=\sin^2(-x)-\cos^2(-x)-1=(-\sin x)^2-\cos^2x-1=\sin^2x-\cos^2x-1$$

לכן $f(-x)=f(x)$ והפונק' זוגית

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \le f(x) \le 0$.

$$f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$$

$$f(x)=-(\cos^2x-\sin^2x)-1=-\cos 2x-1$$

ידוע כי $-1 \le \cos x \le 1$

לכן $-1 \le \cos 2x \le 1$

$-1 \le \cos 2x \le 1 \quad /\cdot(-1)$

$1 \ge -\cos 2x \ge -1$

$-1 \le -\cos 2x \le 1 \quad /-1$

$-2 \le -\cos 2x-1 \le 0$

$$-2 \le f(x) \le 0$$

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

$f(x) = -\cos 2x - 1$

חיתוך עם ציר y:

$f(0) = -\cos 0 - 1 = -2$

$(0,-2)$

חיתוך עם ציר x:

$0 = -\cos 2x - 1$

$\cos 2x = -1$

$2x = \pi + 2\pi k$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k}$

נחפש פתרונות בתחום

$k=0 \quad x = \frac{\pi}{2}$

$k=-1 \quad x = -\frac{\pi}{2}$

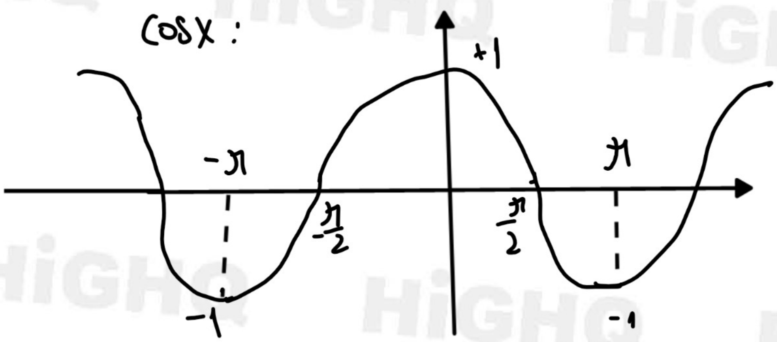
ולכן $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

$f(x) = -\cos 2x - 1$

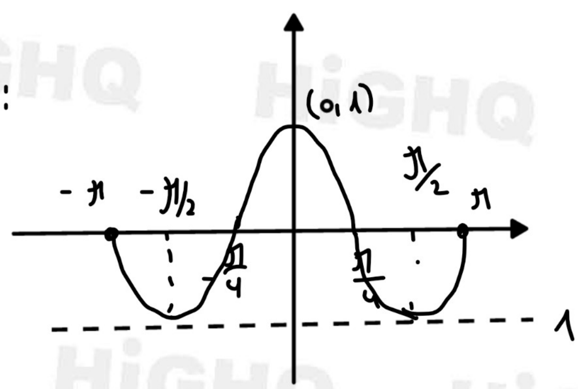
פונ' $\cos 2x$ היא כיווץ של x

$\cos x$:



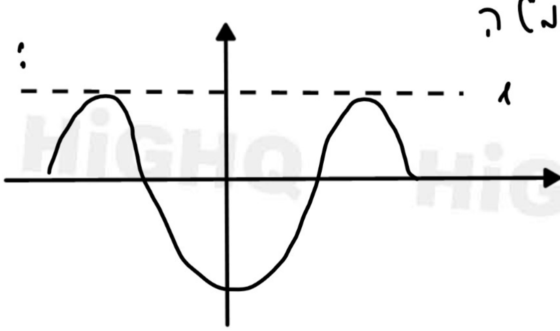
$\cos 2x$:

כל נק' נלך לכיוון ציר y פי ($\frac{x}{2}$)

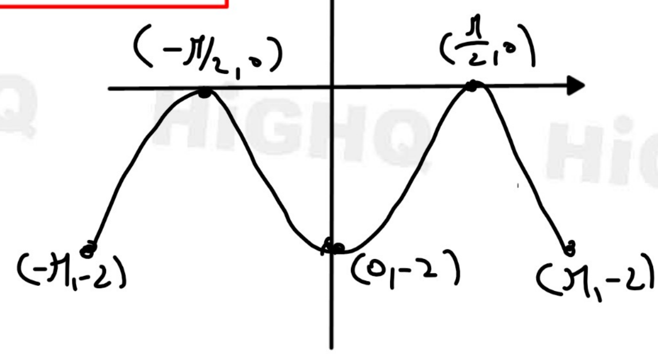


עכשיו $-\cos 2x - 1 \Leftarrow$ הופך את הגרף $\cos 2x$ ומוריד ב יחידה 1 למטה

$-\cos 2x$:



$\boxed{f(x) = -\cos 2x - 1}$



נתונה הפונקצייה $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x.

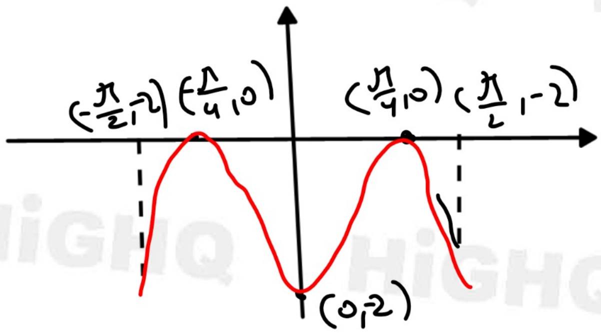
ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

$g(x) = f(2x)$

כ״ג שינוי גו ל x ב $f(x)$:

$x \to \frac{x}{2}$

חכן גרף $g(x)$



חכן נק׳ הקיצון:

$(\frac{\pi}{4},0)$ Max	$(-\frac{\pi}{2},-2)$ Min
$(\frac{\pi}{2},-2)$ Min	$(-\frac{\pi}{4},0)$ Max
	$(0,-2)$ Min

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x))dx = S$.

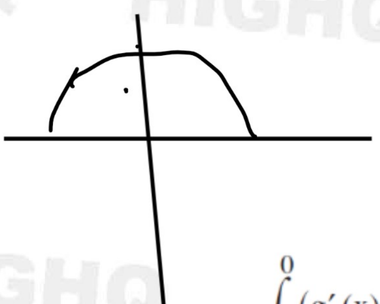
הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} (g'(x) - f'(x))dx$. הסבירו את התשובה.

$$\int_0^{\pi/8} (g'(x) - f'(x)) = S$$

$$S = g(\tfrac{\pi}{8}) - f(\tfrac{\pi}{8}) - g(0) + f(0)$$

$f(x)$ ו $g(x)$ הינן פונק׳ זוגיות

$g(x) = f(2x)$ + $f(x)$ זוגית



$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} (g'(x) - f'(x))dx = g(0) - f(0) - g(-\tfrac{\pi}{8}) + f(-\tfrac{\pi}{8}) =$$

$$= g(0) - f(0) - g(\tfrac{\pi}{8}) + f(\tfrac{\pi}{8}) = -\left(g(\tfrac{\pi}{8}) - f(\tfrac{\pi}{8}) - g(0) + f(0)\right) = \boxed{-S}$$

שאלה 8

8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 6x^2$, המוגדרת לכל x.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה־ y בנקודה C.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B.

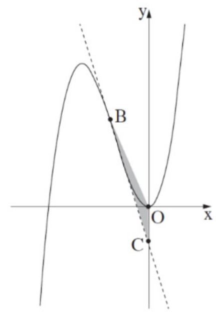
א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה־ x.

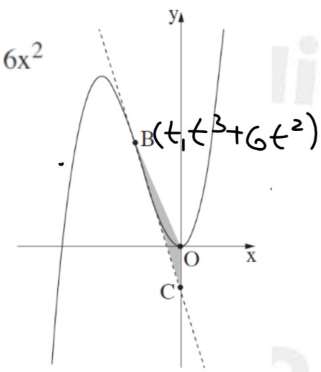
ב. מהו תחום הערכים של t?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.



$f(x) = x^3 + 6x^2$



פתרון

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

$y' = 3x^2 + 12x$

$y'(t) = 3t^2 + 12t$

נציב בנוסחא למציאת ישר:

$m = 3t^2 + 12t$, $(t, t^3 + 6t^2)$

$y - t^3 - 6t^2 = (3t^2 + 12t)(x - t)$

$$\boxed{y = (3t^2 + 12t)x - 2t^3 - 6t^2}$$

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה־ x.

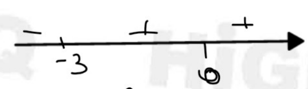
ב. מהו תחום הערכים של t?

c מהווה את האיבר החופשי במשוואת הישר: $-2t^3 - 6t^2$

$-2t^3 - 6t^2 < 0 \quad / \cdot (-)$

$2t^3 + 6t^2 > 0$

$2t^2(t + 3) > 0$

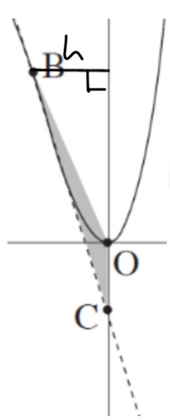


בנוסף נתון כי $t < 0$ (B ברביע השני)

ולכן $-3 < t < 0$

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.



$S = \frac{OC \cdot h}{2}$

כאשר $h = 0 - x_B$

$h = -t$

$OC = 0 - y_c = 2t^3 + 6t^2$

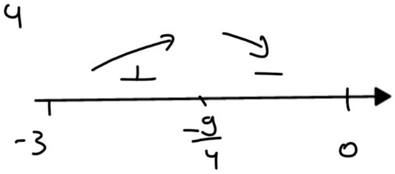
$$S=\frac{-t(2t^3+6t^2)}{2}=-t^4-3t^3$$

$$S(t)=-t^4-3t^3$$

$$S'(t)=-4t^3-9t^2=0$$

$$-t^2(4t+9)=0$$

$t\neq 0$ נפסל $\qquad t=-\frac{9}{4}$



$$f'(-1)=-(+)(+)<0$$

$$f'(-2\tfrac{1}{2})=(-)(+)(-)>0$$

לכן $t=-\frac{9}{4}$ נק' Max

$$S(-\tfrac{9}{4})=-(\tfrac{9}{4})^4-3(-\tfrac{9}{4})^3=\frac{2187}{256}$$

שטח מקסימלי הוא $\frac{2187}{256}$