פתרון בגרות 581 מועד א קיץ 2022

שאלה 1

1. מכונית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1 . באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה v_2 .

המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ.

המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 98 ק"מ.

א. הביעו באמצעות v_1 ו־v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך.

זמן שהיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה.

המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2 , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.

ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.

140 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לבאר שבע.

ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

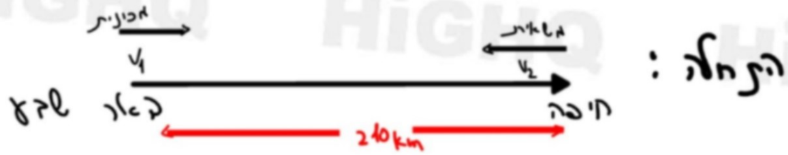
פתרון:

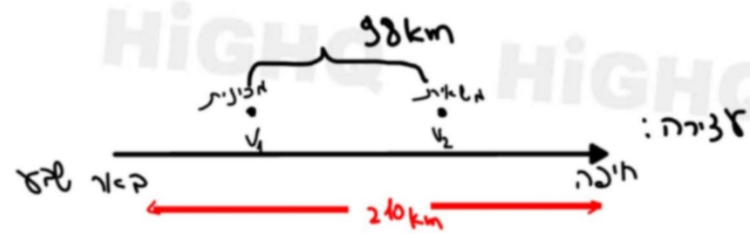
מכונית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1 . באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה v_2 .

המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ.

המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 98 ק"מ.

נציג בעזרת תרשים את הנתונים





א. הביעו באמצעות v_1 ו־v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך.

המרחק שעברו יחדו עד התקלה :

$210-98=112\text{ km}$

נסמן את זמן הנסיעה עד עצירה של המשאית ב t

ולכן
הדרך של המשאית $S_2=t\cdot v_2$
הדרך של מכונית $S_1=t\cdot v_1$

$t v_1+t\cdot v_2=112$

$$t(V_1+V_2)=112 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t=\frac{112}{V_1+V_2}}$$

S	v	t	
98	V_1	$1.5t_1$	מכונית

זמן שהיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה.

המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2 , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.

ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.

ז"א : בזמן שמשאית הייתה בצד הדרך , המכונית עברה 98 קמ . וברגע המפגש - החלה המשאית לנוע

מתוך סעיף א:

$$t_1=\frac{112}{V_1+V_2}$$

מתוך הטבלה

$$V_1\cdot 1.5t_1=98$$

נציב t_1

$$V_1\cdot 1.5\cdot\frac{112}{V_1+V_2}=98$$

$$\frac{V_1}{V_1+V_2}\cdot 168=98 \quad /:168$$

נרצה להציג לביטוי $\frac{V_1}{V_2}$ ולכן

$$\frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{7}{12}$$

$$\frac{V_1+V_2}{V_1}=\frac{12}{7}$$

$$\frac{V_1}{V_1}+\frac{V_2}{V_1}=\frac{12}{7}$$

$$1+\frac{V_2}{V_1}=\frac{12}{7}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{5}{7} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}}$$

היחס בין מהירות
מכונית למשאית הוא $\frac{7}{5}$

140 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לבאר שבע.

ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

$$t_1+\frac{140}{60}=t_1+\frac{7}{3}$$

סה"כ הזמן שנסע המשאית

$$\boxed{S=V\cdot t}$$

לפי

$$210=V_2\left(t_1+\frac{7}{3}\right)$$

נציב t_1

$$210=V_2\left(\frac{112}{V_1+V_2}+\frac{7}{3}\right)$$

נציב את (ב)

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}\longrightarrow V_1=\frac{7}{5}V_2$$

$$210=V_2\left(\frac{112}{\frac{7}{5}V_2+V_2}+\frac{7}{3}\right)$$

$$210=\cancel{V_2}\cdot\frac{112}{\frac{12}{5}\cdot\cancel{V_2}}+\frac{7}{3}V_2$$

$$210=\frac{140}{3}+\frac{7}{3}V_2\Rightarrow\frac{\overset{70}{\cancel{490}}}{\cancel{3}}=\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}}V_2$$

$$\boxed{V_2=70\,\frac{km}{h}}$$

$$V_1=\frac{7}{5}V_2=\frac{7}{5}\cdot 70=98\,\frac{km}{h}$$

$$\boxed{V_1=98\,\frac{km}{h}}$$

מהירות המשאית היא $70\,\frac{km}{h}$

מהירות המכונית היא $98\,\frac{km}{h}$

שאלה 2

2. סדרה I היא סדרה הנדסית אין־סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הִכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \dots$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הַביעו את q באמצעות r.

(2) הַסבירו מדוע שתי הסדרות I ו־ II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15.

ג. מִצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב־5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, \dots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

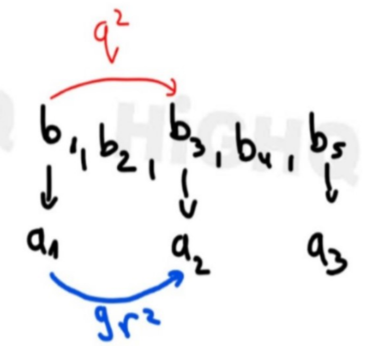
פתרון

סדרה I היא סדרה הנדסית אין־סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הִכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \dots$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הַביעו את q באמצעות r.



נציג את הסדרה החדשה

לכן $q^2 = 9r^2$

$q = \pm 3r$

מכיוון שסדרה II יורדת $0<q$ (אחרת סימנה מתחלפים) $r>0+$

$\boxed{\text{ולכן } q = 3r}$

(2) הַסבירו מדוע שתי הסדרות I ו־ II מתכנסות.

תנאי להתכנסות: מנת הסדרה $0<q<1$

נבדוק עבור I: $q_1 = 9r^2$

$0 < r < \frac{1}{3} \;/()^2 \Rightarrow 0 < r^2 < \frac{1}{9} \;/\cdot 9 \Rightarrow \boxed{0 < 9r^2 < 1}$

לכן q_1 עומד בתנאי התכנסות

נבדוק עבור II $q_2 = 3r$

מתוך הנתון $0<r<\frac{1}{3} \Leftarrow 0<r<\frac{1}{3} /\cdot 3 \Leftarrow$ $\boxed{0<r<1}$

ולכן q^* עומד בתנאי התכנסות

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

* לפי 2 הסדרות אותו איבר 1 $a_1 = b_1$

$$S_{II} = \frac{4}{3} S_I \Longrightarrow \frac{b_1}{1-q_2} = \frac{4}{3}\frac{a_1}{1-q_1}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} q_2 = 3r & \text{נציב} \\ q_1 = 9r^2 & \end{array}}$$

$$\frac{\cancel{a_1}}{1-3r} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\cancel{a_1}}{1-9r^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{1-3r}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(\cancel{1-3r})(1+3r)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{מותר לצמצם כי} \\ r \neq \frac{1}{3} \end{array}}$$

$$3(1+3r) = 4 \quad /:3$$

$$1+3r = \frac{4}{3}$$

$$3r = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{1}{9}}$$

ולכן

$$q = 3r = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{מנת הסדרה II}: \quad q = \frac{1}{3}}$$

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15 .

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב־5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, ...)$.

$b_1, \underline{b_2}, b_3, \underline{b_4}$

זוגי $q^* = q^2$

$$S_2 = \frac{b_2}{1-q^2} = 15 \Rightarrow 15 = \frac{b_1 \cdot q}{1-q^2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot b_1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} b_1 \Rightarrow \cancel{15}^{5} = \frac{3}{8} b_1$$

$$\boxed{b_1 = 40}$$

הסדרה החדשה: b_5, b_{10}, b_{15} גם כן הנדסית

$$a_1^* = b_5 = b_1 \cdot q^4$$

$$q^* = \frac{b_{10}}{b_5} = q^5$$

לכן:

$$S = \frac{a_1^*}{1-q^*} = \frac{b_1 \cdot q^4}{1-q^5} = \frac{40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \frac{\frac{40}{81}}{\frac{242}{243}}$$

$$\boxed{S = \frac{60}{121}}$$

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

$$b_5, \underbrace{b_6, b_7, b_8, \dots}_{S^*}$$

$$S^* = \frac{b_6}{1-q} = \frac{b_5 \cdot q}{1-q}$$

ולכן היחס הוא:

$$\frac{b_5}{S^*} = \frac{\cancel{b_5}}{\frac{\cancel{b_5} \cdot q}{1-q}} = \frac{1-q}{q} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

$\boxed{\text{היחס בין האיבר החמישי לשאר הסכום הוא 2}}$

<u>שאלה 3</u>

3. נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.
ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.
נסמן ב־ p את ההסתברות שנטע <u>תפסיד</u> במשחק $(p > 0)$.
בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.
נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא 4.5p .

א. מצאו את הערך של p .

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב־ 3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

פתרון

נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.
ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.
נסמן ב־ p את ההסתברות שנטע <u>תפסיד</u> במשחק $(p > 0)$.
בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.
נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא 4.5p .

א. מצאו את הערך של p .

קיימים 3 מאורעות - נצחון, הפסד ותיקו

הפסד ← p

נצחון ← $3p$

תיקו ← $P(\text{תיקו}) = 1-p-3p = 1-4p$

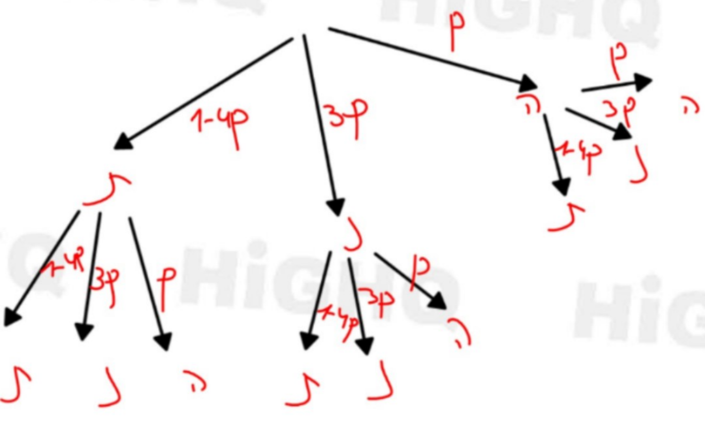
נציג בעץ את 2 המשחקים:

הפסד ← ה

נצחון ← נ

תיקו ← ת

(אין תלות בין מאורעות)



$P(\text{תנצח במשחק 1 לפחות}) = P(\text{נ} \cap \text{ה}) + P(\text{נ}) + P(\text{נ} \cap \text{ת})$

לא משנה מה יקרה במשחק שני

$$P(\text{תנצח במשחק 1 לפחות}) = p\cdot 3p + 3p + 3p(1-4p) = 4.5p$$

$$3p^2 + 3p - 12p^2 + 3p = 4.5p$$

$$9p^2 - 1.5p = 0$$

$$p(9p-1.5) = 0$$

$p=0$ נפסל

$\boxed{p=\frac{1}{6}}$

תשובה

$$\boxed{p=\frac{1}{6}}$$

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב־ 3 משחקים לפחות.

הסעיף מרמז לנו להשתמש בברנולי, ולכן אנחנו צריכים לסווג את המאורעות ל"הצלחה בניסוי" או "כישלון"

הצלחה ← נצח $\quad p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

כישלון ← הפסד + תיקו $\quad 1-p=\frac{1}{2}$

$$P(\text{3 משחקים לפחות}) = P_5(5) + P_5(4) + P_5(3)$$

$$P(\text{3 משחקים לפחות}) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 =$$

$$= \frac{1}{32}(1+5+10) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

תשובה

ההסתברות לנצח לפחות ב 3 משחקים היא $\frac{1}{2}$

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

סעיף זה שונה מהקודם בכך שמספר הנצחונות כאן חשוב!

1 2 3 4 5

משחקים: נצחון, נצחון, נצחון, נצחון/לא, נצחון/לא

* ב 2 משחקים האחרונים היא יכולה לנצח/לא לנצח ולכן משחק 4 ו 5 הסתברותם 1 (כי לא משנה מה יקרה)

$$P(\text{לפחות 3 משחקים ראשונים}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{8}$$

תשובה

$$\boxed{\text{ההסתברות לנצח לפחות ב 3 משחקים ראשונים היא } \frac{1}{8}}$$

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

"לא להפסיד" או נצחון או תיקו ולכן כעת:

$$p = 1 - P(\text{להפסיד}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(\text{לא להפסיד}) = \binom{5}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^0 = 1\cdot\frac{3125}{7776} \approx 0.401$$

תשובה

$$\boxed{\text{ההסתברות לא להפסיד באף משחק היא } 0.401}$$

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

← עלינו לעשות הסתברות מותנית

1. הפסידה במשחק אחד לפחות ← הסתברות משלימה לאי הפסידה באף משחק

$$P(\text{הפסידה במשחק 1 לפחות}) = 1 - P(\text{לא הפסידה}) = 1 - \frac{3125}{7776} = \frac{4651}{7776}$$

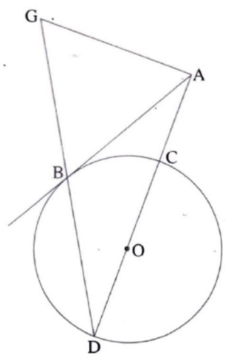
ניצחה ב 3 ראשונים וקיבלה תיקו באחרון

תיקו הפסד ניצחה ניצחה ניצחה $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{144}$

מכיוון שהיא הפסידה במשחק 1 לפחות, זה חייב להיות משחק מס' 4
כי מדובר בהסתברות מותנית

$$P\left(\text{ניצחה + תיקו} \;/\; \text{הפסידה ב 1 לפחות}\right) = \frac{\frac{1}{144}}{\frac{4651}{7776}} = \frac{54}{4651}$$

שאלה 5



4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו־ D,

והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

הנקודות D, B ו־ G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

נתון: $AG = 7$, $AC = \frac{1}{2}DC$.

ג. חשבו את R.

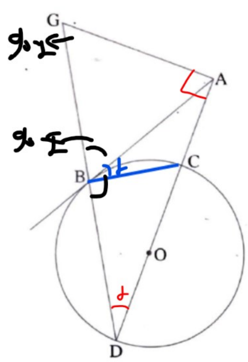
נסמן ב־ S את שטח המשולש BDC.

ד. **(1)** הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

פתרון

נתון:



נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו־ D,

והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

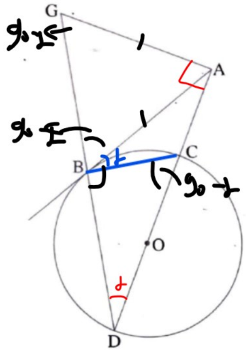
הנקודות D, B ו־ G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

	טענה	נימוק
	1) בניית עזר BC	
	2) משיק BA	נתון
	3) $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABC = \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו המיתר מצדו השני + 2
	4) $\sphericalangle DBC = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר
	5) $\sphericalangle GBA = 180-90-\alpha = 90-\alpha$	סכום זוויות בזווית שטוחה + 3 + 4
ΔDGA:	6) $\sphericalangle GAD = 90^\circ$	נתון AG מאונך ל AD
	7) $\sphericalangle DGA = 180-90-\alpha = 90-\alpha$	סכום זוויות במשולש ΔDGA + 3+6
ΔABG	8) $\sphericalangle GAB = 180-2(90-\alpha) = 2\alpha$	סכום זוויות במשולש ΔABG + 5+7

תשובה א: $2\alpha, 90-\alpha, 90-\alpha$



$180-90-2\alpha$

נימוק	טענה
זווית משותפת למשולשים ΔDBA, ΔBAC	9) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAC$
ע"פ משפט דמיון ז.ז + 9 + 3	10) $\Delta DBA \sim \Delta BCA$
צלעות פרופורציוניות במשולשים דומים	11) $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$
	מש"ל ב.

$7 \quad \frac{R}{7}$

.ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$

נתון: $AG = 7$, $AC = \frac{1}{2}DC$.

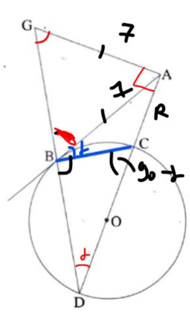
ג. חשבו את R.

נימוק	טענה
אם זוויות הבסיס שוות ז"ז המשולש שווה שוקיים + 7,5 (מש)	12) משו"ש ΔGAB
שוקי המשולש שווים במשו"ש + 12	13) $AG = AB$
קוטר במעגל	14) $DC = 2R$
נתון $AC = \frac{1}{2}DC$	15) $AC = R$
צלעות פרופורציוניות במשולשים דומים + 10	16) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{BA}$
תשובה + 14, 15, נתון	$\frac{7}{3R} = \frac{R}{7}$
	$49 = 3R^2$
	$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$
	מש"ל ג.

נסמן ב־S את שטח המשולש BDC.

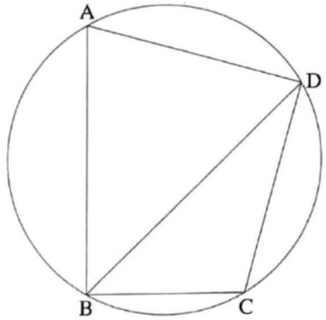
ד. (1) הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.



נימוק	טענה
סכום זוויות במשולש + 4 + נתון	17) $\sphericalangle BCD = 90-\alpha$
משפט דמיון ז.ז + 17 + מש"ל א	18) ע"פ ז"ז $\Delta BDC \sim \Delta ADG$
משפט פיתגורס + ת.שוק	19) $GD^2 = AG^2 + AD^2$
	$GD^2 = 7^2 + 9R^2 = 7^2 + 9 \cdot \frac{49}{3}$
	$GD = 14$
יחס השטחים במשולשים דומים הוא ריבוע יחס הצלעות הפרופורציוניות	20) $\frac{S_{DBDC}}{S_{ADG}} = \left(\frac{CD}{DG}\right)^2$
	$\frac{S}{S_{\Delta ADG}} = \left(\frac{2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}}{14}\right)^2 = \frac{1}{3}$
	מש"ל ד.2 $\boxed{S_{\Delta ADG} = 3S}$

שאלה 5



5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו־ R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α.

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

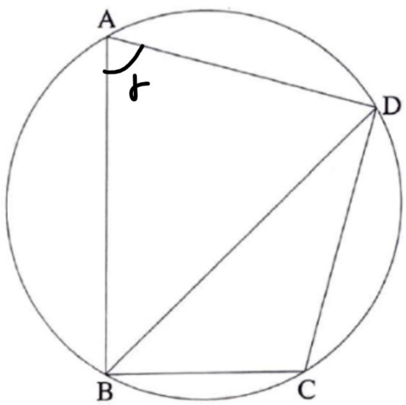
ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב־ h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב־ h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פתרון



נתון: רדיוס מעגל R, מרובע ABCD חסום

$\sphericalangle DAB = \alpha$

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו־ R.

נסתכל על משולש חסום במעגל ΔBAD

$\sphericalangle BAD = \alpha$ נתון

$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R$ ע"פ משפט סינוסים

$\Downarrow$

$\boxed{BD = 2R\cdot\sin\alpha}$

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α.

$\Delta BCD:$

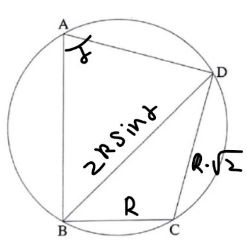
1) $\sphericalangle C = 180 - \alpha$ זוויות נגדיות במרובע חסום.

2) ע"פ משפט קוסינוס

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC\cdot CD\cdot \cos\sphericalangle C$

$(2R\sin\alpha)^2 = R^2 + 2R^2 - 2\sqrt{2}R^2\cos(180-\alpha)$

$4R^2\sin^2\alpha = 3R^2 + 2\sqrt{2}R^2\cos\alpha \quad /:R^2$



המשך:

$4\sin^2\alpha = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$

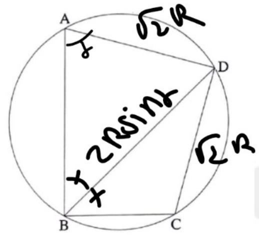
$4(1-\cos^2\alpha) = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$

$0 = 4\cos^2\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha - 1$

$\cos\alpha_1 = -0.969 \qquad \cos\alpha_2 = 0.2588$

נפסל (α זווית חדה)

$\boxed{\alpha_2 = 75^\circ}$



נתון: BD הוא חוצה זווית ABC .

ג. חשבו את גודל הזווית ABD .

1) $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ נתון BD חוצה זווית

$\Downarrow$

2) $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$

3) $AD = CD = R\cdot\sqrt{2}$ מיתרים שווים נשענים על זוויות היקפיות שוות

ΔBAD

לפי משפט סינוסים: (משולש חסום במעגל)

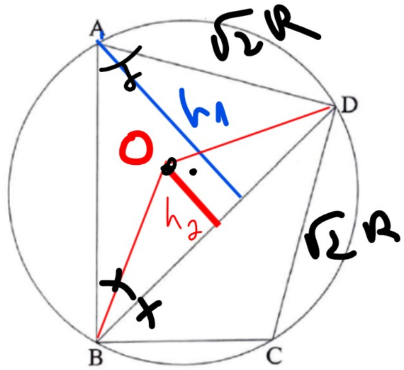
$$\frac{AD}{\sin\sphericalangle ABD} = 2R$$

$\Downarrow$

$$\frac{\sqrt{2}\cancel{R}}{\sin\sphericalangle ABD} = 2\cancel{R}$$

$$\sin\sphericalangle ABD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sphericalangle ABD = 45^\circ$$



נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD ,

וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD .

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

1) $\sphericalangle BOD = 2\alpha$ זווית מרכזית גדולה פי 2 מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת

2) $S_{\Delta BAD} = \frac{h_1\cdot BD}{2}$

$S_{\Delta BOD} = \frac{h_2\cdot BD}{2}$

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BOD}} = \frac{\frac{h_1\cdot BD}{2}}{\frac{h_2\cdot BD}{2}} = \frac{h_1}{h_2}$$

3) נבדוק את השטח בדרך נוספת

ΔBAD:

$\sphericalangle ADB = 180 - 75 - 45 = 60$

S

המשך:

$$S_{\Delta BAD}=\frac{AD\cdot BD}{2}\cdot \sin\sphericalangle ADB=\frac{\sqrt{2}R(\cancel{2}R\sin\alpha)\cdot\sin 60}{\cancel{2}}$$

$$=\sqrt{2}R^2\cdot\sin 75\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta BOD}=\frac{BO\cdot OD}{2}\cdot\sin\sphericalangle BOD=\frac{R^2\cdot\sin 150}{2}=$$

$$=\frac{R^2\cdot}{4}$$

לכן יחס השטחים

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BOD}}=\frac{\sqrt{2}\cancel{R^2}(\sin 75)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\cancel{R^2}\cdot}{4}}=2\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 75\approx 4.732$$

$$\frac{h_1}{h_2}=4.732$$

שאלה 6

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

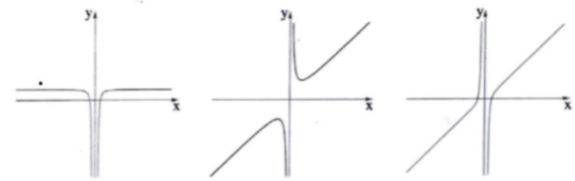
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו־ $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

<u>לכל אחת</u> מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



גרף III   גרף II   גרף I

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{2}$ ו־ $x = 2$.

ה. נתון: $1 < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \int_{1}^{x} f'(t)dt$. נתון כי הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \le x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

פתרון

נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ת.ה $x \neq 0$

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את התשובה.

$$f(-x) = 3\cdot(-x) + \frac{3}{(-x)} = -3x - \frac{3}{x} = -\left(3x + \frac{3}{x}\right) = -f(x)$$

הפונקציה הינה אי זוגית

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

$f(x) = 3x + \frac{3}{x}$.

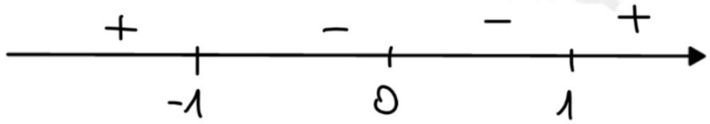
נגזור את הפונ' :

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^2} \Rightarrow 3 - \frac{3}{x^2} = 0 \quad / \frac{x^2}{3}$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$x = 1$ $x = -1$



נבדוק את סימן הנגזרת

$f'(-2) = 3 - \frac{3}{4} > 0$

$f'(-\frac{1}{2}) = 3 - \frac{3}{\frac{1}{4}} < 0$

$f'(\frac{1}{2}) = 3 - \frac{3}{1/4} < 0$

$f'(2) = 3 - \frac{3}{4} > 0$

הערה:

אם הפונ' אי זוגית הנגזרת זוגית והפוך

תחומי עלייה:

$X>1$ או $X<-1$

תחומי ירידה

$0<X<1$ או $-1<X<0$

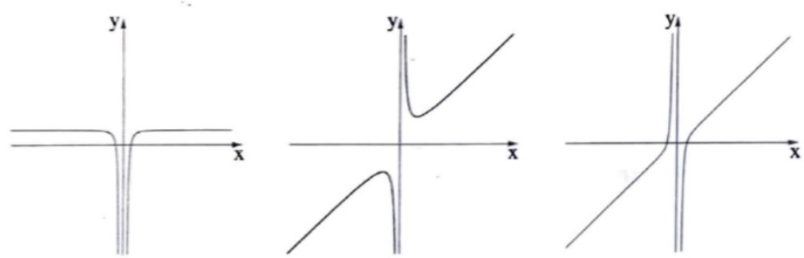
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

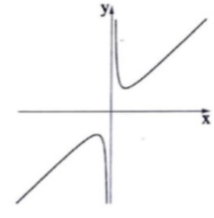
הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.

לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.

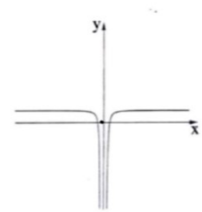


גרף III גרף II גרף I



גרף II

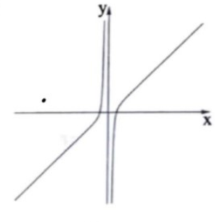
בגרף $f(x)$: הוכחנו כי $f(x)$ הינה פונ' אי זוגית (וגם לפי ת.עלייה וירידה)



גרף III

גרף $f'(x)$: ע"פ חיוביות ושליליות של הנגזרת מהסעיף הקודם

גרף $g(x)$: מהווה מכפלת סימני הפונ' $f(x)$ ו $f'(x)$



גרף I

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ x.

$$g(x) = f(x)\cdot f'(x)$$

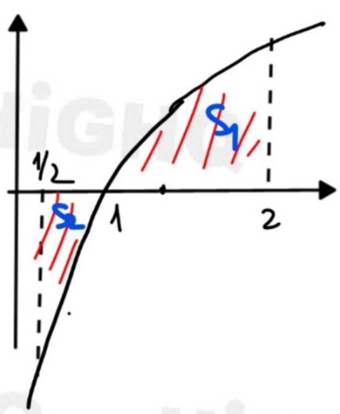
$f(x)=0$ או $f'(x)=0$

$f(x)=0$ ← אין

$f'(x)=0$ כבר מצאנו בסעיף א' : $x=1,-1$

לכן נק' חיתוך של $g(x)$ עם ציר x $(1,0)$, $(-1,0)$

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{2}$ ו־ $x=2$.



$$S_1=\int_1^2 g(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\cdot f'(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' dx = \frac{f^2(x)}{2}\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{\left(3x+\frac{3}{x}\right)^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{\left(3\cdot2+\frac{3}{2}\right)^2}{2}-\frac{(3+3)^2}{2}=\frac{225}{8}-18=\frac{81}{8}$$

$$S_2=\int_{1/2}^{1} -g(x)\,dx=-\frac{\left(3x+\frac{3}{x}\right)^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\left[\frac{(3+3)^2}{2}-\frac{\left(\frac{3}{2}+6\right)^2}{2}\right]=-18+\frac{225}{8}=\frac{81}{8}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{81}{4}=20.25$$

השטח המוגבל הוא 20.25 יח"ר

ה. נתון: $1 < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx$.

$$\int_{1/a}^{a} g(x)\,dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_{1/a}^{a} = \frac{\left(3a+\frac{3}{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{3}{a}+3a\right)^2}{2} = 0$$

נתונה הפונקציה $h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)\,dt$. נתון כי הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \le x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

$$h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(1)$$

לכן

$$h'(x) = f'(x)$$

בתחום $1\le x$ קיימת ל $f(x)$ נק' קיצון אחת ב: $x=1$

עפ"י ת.על"ה/ירידה או גרף f ניתן לראות כי היא נק' Min

נמצא את ערך ה y:

תשובה $h(1)=f(1)-f(1)=0$

$\boxed{\text{Min } (1,0)}$

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. **(1)** הַראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. **(1)** סַרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) t הוא מספר. מִצאו את כל ערכי t שבעבורם יש למשוואה $f(x)=t$ פתרון יחיד (בתחום $0\le x\le 2\pi$).

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי שני הישרים $x=\frac{3}{4}\pi$ ו־ $x=\frac{5}{4}\pi$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

$f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ת.ה

$\cos x\neq 0$

$x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k$

ולכן בתחום הנ"ל!

$x\neq \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3}{2}\pi$

בתחום $0\le x\le 2\pi$

(2) הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x .

$f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ניתן לצמצם!

$$f(x)=\frac{\cancel{2}(\cos x)^{\cancel{2}}+\cancel{2}\sin x\cdot\cos\cancel{x}}{\cancel{2}\cos\cancel{x}}=$$

$$\boxed{f(x)=\cos x+\sin x}$$

נק' אי ההגדרה מהוות "חור" בפונ' ולא אסימפטוטה אנכית

הערה!

מותר לצמצם $\cos x$ כי הגדרנו $\cos x\neq 0$

← ניתן להמשיך עם הביטוי המצומצם

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

$0 \le x \le 2\pi$

$f(x) = \cos x + \sin x$

חיתוך עם ציר y: $x=0$

$f(0) = \cos 0 + \sin(0) = 1$

$\boxed{(0,1)}$

חיתוך עם ציר x: $y=0$

$\cos x + \sin x = 0$

$\sin x = -\cos x \quad /:\cos x$

$\tan x = -1$

$x = \frac{3}{4}\pi + \pi k$

$x = \frac{3}{4}\pi \ , \ \frac{7}{4}\pi$

$\boxed{(\frac{3}{4}\pi, 0) \ , \ (\frac{7}{4}\pi, 0)}$

תשובה:

נק' חיתוך עם צירים:

$\boxed{(0,1) \ , \ (\frac{7}{4}\pi, 0) \ , \ (\frac{3}{4}\pi, 0)}$

ב. **(1)** הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ מתקיים: $f'(x) = \cos x - \sin x$.

$f(x) = \cos x + \sin x$

$f'(x) = -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x \quad /:\cos x$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$x_1 = \frac{\pi}{4} \ , \ \frac{5}{4}\pi$

נגזור שנית

$f''(x) = -\sin x - \cos x = -(\sin x + \cos x)$

$f''(\frac{\pi}{4}) = (-)\cdot(+) < 0 \rightarrow$ Max נק'

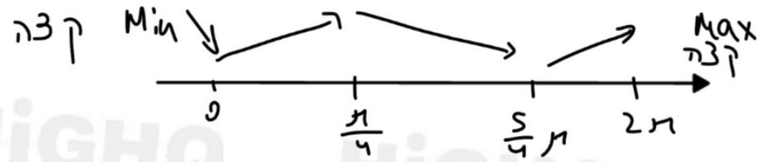
$f''(\frac{5}{4}\pi) = (-)(-) > 0 \rightarrow$ Min נק'

נמצא את שיעורי ה y

$\boxed{f(x) = \cos x + \sin x}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$f(\frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$



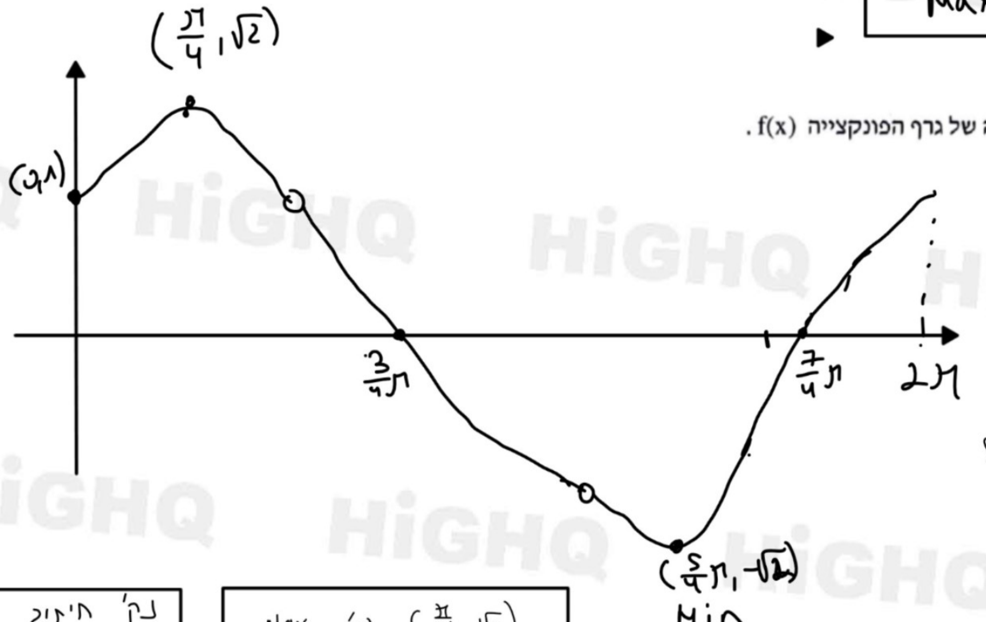
Max נק' $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$

Min נק' $(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2})$

Min נק' $(0, 1)$

Max נק' $(2\pi, 1)$

ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



נמצא את ערך y של הנק' הפליקה ("חור")

$f(\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 = 1$

חור $(\frac{\pi}{2}, 1)$

$f(\frac{3}{2}\pi) = 0 + (-1) = -1$

חור $(\frac{3}{2}\pi, -1)$

נק' חיתוך עם צירים:
$(0,1)$, $(\frac{7}{4}\pi, 0)$, $(\frac{3}{4}\pi, 0)$

Max נק' $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$

Min נק' $(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2})$

Min $(0, 1)$

Max $(2\pi, 1)$

(2) t הוא מספר. מצאו את כל ערכי t שבעבורם יש למשוואה $f(x) = t$ פתרון יחיד (בתחום $0 \le x \le 2\pi$).

בעצם עלינו לבדוק היכן יש לפונ' השקה עם ישר $y = t$

← בנק' קיצון פנימיות

$t = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

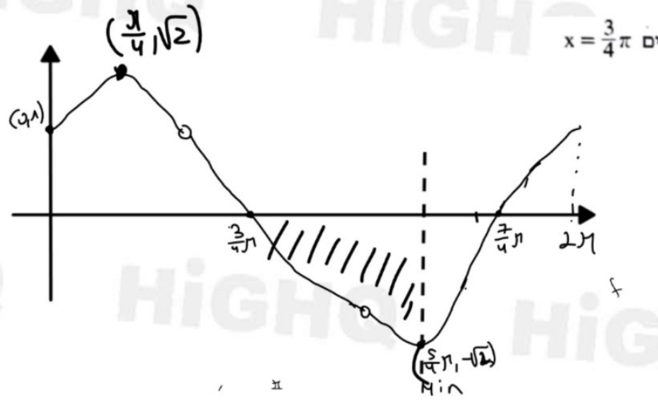
כמו כן ב $t=-1$ (היכן שקיים החור) תהיה נק' חיתוך 1

ולכן:

$$t=\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -1$$

הערה

$\boxed{\text{החור השני לא מתאים כי שם עוברות שני קיצון קצה}}$



ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי שני הישרים $x=\frac{3}{4}\pi$ ו־ $x=\frac{5}{4}\pi$.

$$S=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}-(\cos x+\sin x)\,dx=-\left[\sin x+\cos x\right]\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$$

תשובה

$\boxed{\text{השטח המוגבל הוא } \sqrt{2}}$

8. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .

נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ p את שיעור ה־ x של הנקודה A . p הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות p את אורך הקטע AB .

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB .

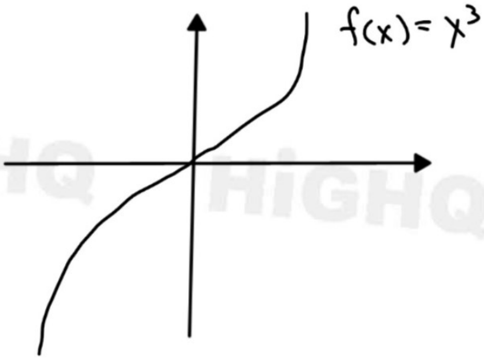
ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

פתרון

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.



א. (1) $f(x)$ פונ' רציפה ומוגדרת לכל x

$g(x)=\sqrt{f(x)}$ מוגדרת היכן ש $f(x)>0$

(ניתן להסביר ע"פ גרף ש x^3 או פתרון אי שוויון)

$\boxed{x \ge 0} \Leftarrow x^3 \ge 0$

$g(x)$ מוגדרת ב $x \ge 0$

(2) $x^3 = \sqrt{x^3}$ $/()^2$

$x^6 - x^3 = 0$

$x^3(x^3-1)=0$

$x=0$, $x=1$

לכן נק' החיתוך: $\Leftarrow$

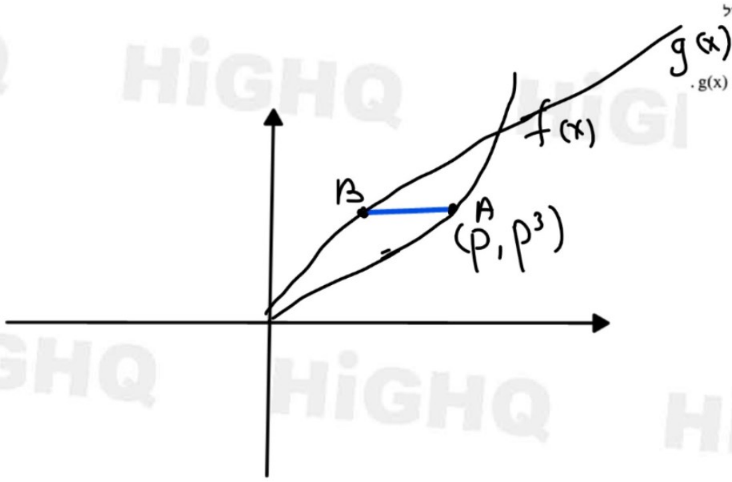
$(0,0)$, $(1,1)$

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .

נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ p את שיעור ה־ x של הנקודה A . p הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות p את אורך הקטע AB .



נבין את שיעור ה x של B

$p^3 = g(x) = \sqrt{x^3}$

$p^6 = x^3 \rightarrow x_B = p^2$

$AB = x_A - x_B = p - p^2$

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB .

$$h = y_A = p^3$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{(p-p^2)\,p^3}{2}$$

$$S(x) = \frac{x^4 - x^5}{2}$$

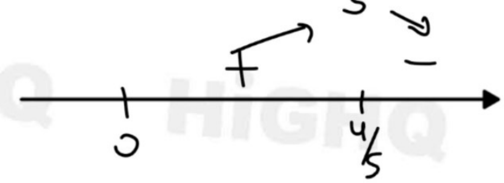
x מהווה את שיעורי נק' A

לכן $0<x<1$

$$S'(x) = \frac{4x^3 - 5x^4}{2} = 0 \quad / \cdot 2$$

$$x^3(4-5x) = 0$$

$x=0$ $\qquad$ $x=\frac{4}{5}$



$$S'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0$$

$$S'\left(\tfrac{5}{6}\right) < 0$$

אכן ועבור $x=\frac{4}{5}$ מתקבלת נק' Max $\Leftarrow$ שטח מקסימלי

$$S = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5}{2} = \frac{128}{3125} = 0.04096$$

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

נבדוק האם קיימת אותה נק' קיצון

$$AB(x) = x - x^2$$

(אפשר לצייר את AB או למצוא את $x_{ק}$, כי AB מייצג פרבולה בוכה)

$$AB'(x) = 1 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \tfrac{1}{2}}$$

לא מתקיים שטח מקסימלי ואורך מקסימלי של AB בו זמנית