פתרון בגרות חורף 2022 581

.1 שלושה שחיינים – איתן, גל ויעקב – מתאמנים בשחייה בבריכה שאורכה 50 מטרים.

כל שחיין מתחיל את שחייתו בתחילת הבריכה, שוחה עד סוף הבריכה, ומייד מסתובב ושוחה חזרה לתחילת הבריכה.

מהירות השחייה של כל אחד מן השחיינים היא קבועה.

ביום א' התחיל כל אחד משלושת השחיינים את שחייתו בזמן אחר.

גל התחיל לשחות 10 שניות אחרי איתן.

יעקב התחיל לשחות 15 שניות אחרי איתן.

15 שניות אחרי שהתחיל יעקב לשחות, עברו כל השחיינים את אותו המרחק מתחילת הבריכה, אך עדיין לא הגיעו לסוף הבריכה.

מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה.

א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחיינים.

ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?

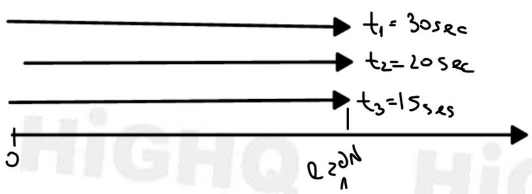
ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחיינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה. שני השחיינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה.

ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

איתן V_1

גל V_2

יעקב V_3



	V	t	S
איתן	V_1	30	$V_1 \cdot 30$
גל	V_2	20	$V_2 \cdot 20$
יעקב	V_3	15	$V_3 \cdot 15$

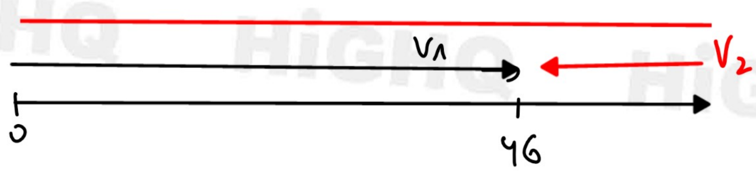
מפגש 1:

$30V_1 = 20V_2$

$V_2 = \frac{3}{2}V_1$

$15V_3 = 30V_1$

$V_3 = 2V_1$



נשווה בין הזמנים

$$\frac{46}{V_1} = \frac{50+4}{V_2} + 10$$

* גל שחה 10 שניות פחות

נציב $V_2 = \frac{3}{2}V_1$

$$\frac{46}{V_1} = \frac{54}{1.5V_1} + 10$$

$$\frac{46}{V_1} - \frac{36}{V_1} = 10$$

$$\frac{10}{V_1} = 10 \rightarrow V_1 = 1\frac{m}{s}$$

ולכן

$V_2 = 1.5\frac{m}{s}$

$V_2 = 2\frac{m}{s}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{איתן} & V = 1\frac{m}{s} \\ \text{גל} & V = 1.5\frac{m}{s} \\ \text{יעקב} & V = 2\frac{m}{s} \end{array}}$$

ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?

הם יפגשו פעם שנייה כאשר יעקב יהיה בחזור ולכן יחדיו עברו 2 בריכות

$$V_g t + V_1 (t+15) = 100 \Rightarrow 2\cdot t + 1(t+15) = 100$$

$$3t + 15 = 100$$

$$3t = 85 \rightarrow t = \frac{85}{3}\ sec$$

יפגשו $\frac{85}{3}$ sec אחרי יציאה של יעקב

נמצא מיקום $v\cdot t \rightarrow 2\cdot\frac{85}{3} = \frac{170}{3}$

נחסיר "בריכה" $\frac{170}{3} - 50 = 6\frac{2}{3}$

יפגשו $6\frac{2}{3}m$ לפני סוף הבריכה

ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחיינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה. שני השחיינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו <u>בתחילת הבריכה</u>.

ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

$$V_{\text{גל}} = 1.5\ \frac{m}{s}$$

$$V_{\text{יעקב}} = 2\ \frac{m}{s}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{V_1\cdot t}{V_2\cdot t} = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4}$$

יחס המרחקים הוא כיחס המהירויות

הם נפגשו בזמן בו שניהם עשו בריכה שלמה

$$3 : 4$$

$$6 : 8$$

היחס הכי קטן המתחלק ב 2 (2 בריכות)

ולכן יעקב ישחה 8 בריכות : $8\cdot 50 = 400m$

יעקב ישחה 400_m

2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$, וְהפרשה d .

מסמנים ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A , לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B , שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$. איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$,

לכל n טבעי.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A ? נמק.

מסמנים ב־ T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B , לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \ldots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d} .$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי־זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

$b_n = S_{n+1} - S_n$

מצד שני $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

ולכן $b_n = a_{n+1}$

מ״ל כי b_n היא סדרה חשבונית

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A ? נמק.

הסדרות אינן זהות. $a_{n+1} = b_n$ ולכן יש הזזה של איבר 1 ימינה

$b_1 = a_2$

$b_2 = a_3$

וכו׳

מסמנים ב־ T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B , לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \ldots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d} .$$

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(-d) + (b_3+b_4)(-d) + \ldots (b_{n-1}+b_n)(-d)}{-d} = \frac{-\cancel{d}(b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots\ldots b_n)}{-\cancel{d}}$$

$= S_{(b_n)}$ משל

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

נציב את הנתונים :

$T_5 = (2b_1 + (5-1)d] \frac{5}{2} = -20$

$(2b_1 + 4d) = -8$

(1 $\boxed{b_1 + 2d = -4}$

$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$$(b_1-b_2)(b_1+b_2)+(b_3-b_4)(b_3+b_4)+\ldots\ldots(b_{39}-b_{40})(b_{39}+b_{40})=-90$$

להה לביטוי שפיתחני עבור מד

$$-d(b_1+b_2+\ldots b_{40})=-95$$

$$\cancel{-}d\cdot\left[2b_1+(40-1)d\right]\cdot\frac{40}{2}=\cancel{-}95$$

$$(2) \quad d(2b_1+39d)=4.75$$

נפתור מערכת משוואות של (1) - (2)

$$\begin{cases}(1) & b_1+2d=-4\\(2) & d(2b_1+39d)=4.75\end{cases} \Rightarrow (1)\ b_1=-4-2d$$

נציב לתוך (2)

$$d(2(-4-2d)+39d)=4.75$$

$$d(-8-4d+39d)=4.75 \Rightarrow d(-8+35d)=4.75$$

$$35d^2-8d-4.75=0 \begin{cases}\nearrow d_1=\frac{1}{2}\\ \searrow d_2=-0.27\end{cases}$$

(נפס) X

$$\boxed{\begin{matrix}d_1=\frac{1}{2}\\ b_1=-5\end{matrix}}$$

נציב ב (1)

$$b_1=-4-2d=-4-2\cdot\frac{1}{2}=-5$$

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי־זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

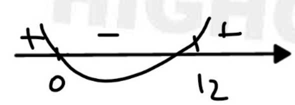
עבור הסדרה a_n! קיים אותו הפרש סדרה כמו b_n ולכן $d=\frac{1}{2}$

$$a_2=b_1=-5 \longrightarrow a_1=a_2-d=-5.5$$

$$S_n=\left[a_1+(n-1)d\right]\frac{n}{2}>0 \Rightarrow \left[-5.5+(n-1)\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{n}{2}>0$$

$$\left[-\frac{11}{2}+(n-1)\frac{1}{2}\right)\frac{n}{2}>0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(-11+n-1\right)\frac{n}{2}>0 \quad /\cdot 4$$

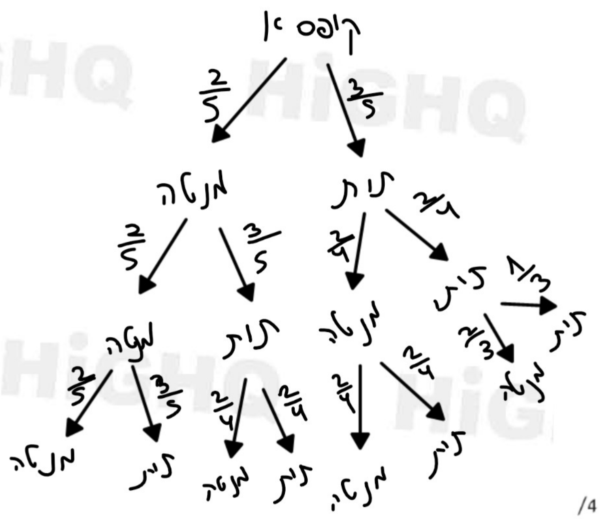
$$(n-12)n>0$$



לכן $S_{12}=0$

איבר במקום אי זוגי הווה שבר ולכן יש לחבר עוד 2 איברים

כלומר סה"כ 14 איברים



3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

/המשך בעמוד 4/

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

← להוציא תות פעם 1

$$P(\text{סוכרייה } 1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{183}{500}$$

ההסתברות לאכול בדיוק סוכרייה 1 היא $\frac{183}{500}$

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

$$P(\text{הסוכרייה ה-2 הייתה תות} / \text{אכל רק 1}) = \frac{P(\text{רק 1, 2 תות})}{P(\text{רק 1})} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{183}{500}} = \frac{20}{61}$$

ההסתברות היא $\frac{20}{61}$

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

הסתברות משלימה ל"לפחות סוכרייה 1" היא "אף סוכרייה" כלו'
שהוא יוציא רק מנטה

$$P(\text{לפחות } 1) = 1 - P(\text{רק מנטה}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

או שיוציא תות מראשונה וגם כלום משניה או ההפך

$$P = \left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{96}{7500} = \frac{8}{625}$$

ההסתברות היא $\frac{8}{625}$

4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).
הצלע BC היא קוטר במעגל.
AG הוא המשך הצלע CA.
הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.
נתון: GA = AC.

א. הוכח כי הישר AB חוצה את ∢GBC.

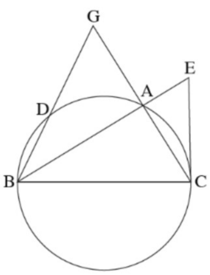
ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

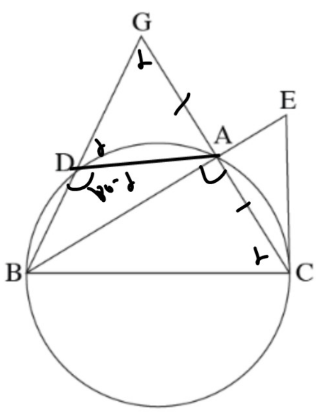
נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.





א. הוכח כי הישר AB חוצה את ∢GBC.

טענה	נימוק
1) BC קוטר	נתון
2) $\sphericalangle BAC = 90°$	זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר
3) $GA = AC$	נתון
4) $\triangle GBC$ מש"ש	אם תיכון מתלכד עם גובה אז המשולש מש"ש + טענות 2, 3
⇓ BA חוצה זווית $\sphericalangle GBC$	במש"ש הגובה מתלכד עם תיכון וחוצה זווית

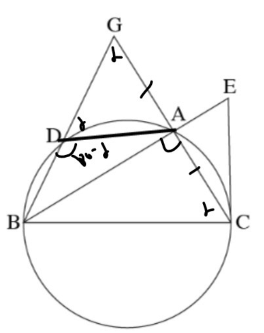
ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

טענה	נימוק
5) $\sphericalangle BGC = BCG = \alpha$	זוויות בסיס שוות במש"ש + סימון + טענה 4
נסתכל על מרובע BDAC:	
6) $\sphericalangle BDA = 180 - \alpha$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל־180° + טענה 5
7) $\sphericalangle GDA = \alpha$	סכום זוויות סמוכות + טענה 6
⇓ 8) $\triangle GBC \sim \triangle GAC$	ע"פ משפט דמיון ז.ז + טענות 7, 5

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

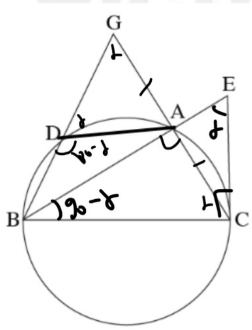
טענה	נימוק
9) $S_{\triangle GBC} = S_{DBCA} + S_{GAD} = 15S + S = 16S$	נתון + סימון $S_{GAG} = S$



טענה	נימוק
10) $\frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta GDA}} = \frac{16S}{S} = 16$	
$\frac{BC}{GA} = \sqrt{\frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta GDA}}} = 4$ $\Downarrow$ $\frac{2R}{GA} = 4 \rightarrow GA = \frac{R}{2}$	יחס השטחים במשולשים דומים הוא ריבוע יחס הצלעות הפרופורציוניות + טענה 8 + 10
$\Downarrow$ $AC = \frac{R}{2}$	ע"פ טענה 3

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.



טענה	נימוק
11) $\sphericalangle ECB = 90°$	זווית בין רדיוס למשיק שווה ל $90°$ + נתון
12) $\sphericalangle ABC = 90 - \alpha$	סכום זוויות במשולש + טענות 2+5
13) $\Delta BAC \sim \Delta BCE$	ע"פ ז.ז + טענות 5+11+12
14) $\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BC}$	יחס צלעות פרופורציוניות במשולשים דומים
15) $BC^2 = AC^2 + BA^2$, $(2R)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + BA^2$, $BA = \frac{\sqrt{15}}{2} R$	משפט פיתגורס + משל 2
16) $BC^2 = BE \cdot AB$, $4R^{\cancel{2}} = BE \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cancel{R}$, $\boxed{BE = \frac{8}{\sqrt{15}} R}$	מתוך 14 + 15
17) $\frac{S_{CBE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{AC \cdot BE}{2}}{\frac{AC \cdot BA}{2}} = \frac{BE}{BA}$	

$\dfrac{S_{CBE}}{S_{ABC}} = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{\frac{8}{\sqrt{15}}R}{\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot R} = \dfrac{16}{15}$	חישוב
$\dfrac{S_{CBE}}{S_{ABC}} = \dfrac{16}{15}$	+ טענות 15, 16, 17
משל	

5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.

א. הראה כי $\sphericalangle BAD = 90^o - \alpha$.

נתון כי $ED = FD$.

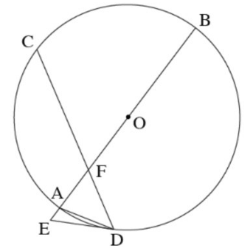
ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

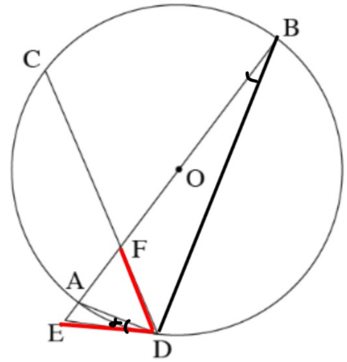
ג. הבע באמצעות R ו־ α את שטח המשולש AFD.

ד. **(1)** הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

מצא את α.





נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.

א. הראה כי $\sphericalangle BAD = 90^o - \alpha$.

$\sphericalangle ABD = \alpha$ זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

$\sphericalangle ADB = 90^\circ$ זווית היקפית הנשענת על קוטר

$\Downarrow$ ΔBAD

$\sphericalangle BAD = 90-\alpha$ סכום זוויות במשולש

נתון כי $ED = FD$.

ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

$\sphericalangle BED = 90-\alpha-\alpha = 90-2\alpha$ זווית חיצונית למשולש ($\sphericalangle BAD$) שווה לסכום שתי הזוויות שאינן סמוכות לה.

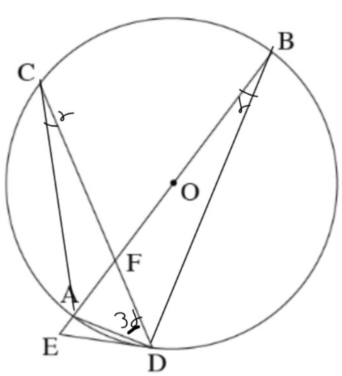
ΔEFD ש"ש נתון $ED=FD$

$\Downarrow$

$\sphericalangle EFD = 90-2\alpha$

$\sphericalangle FDE = 180-(90-2\alpha)\cdot 2 = 4\alpha$ סכום זוויות במשולש

$\sphericalangle CDA = \sphericalangle FDE - \alpha = 3\alpha$



ג. הבע באמצעות R ו־ α את שטח המשולש AFD.

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = \alpha$ זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר

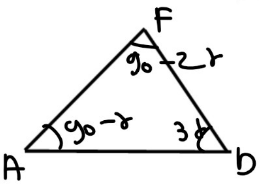
נסתכל ΔACD החסום במעגל

לפי משפט Sin

$\frac{AD}{\sin\sphericalangle ACD} = 2R$

$$AD = 2R\cdot\sin\alpha$$

sin law ב ΔAFD



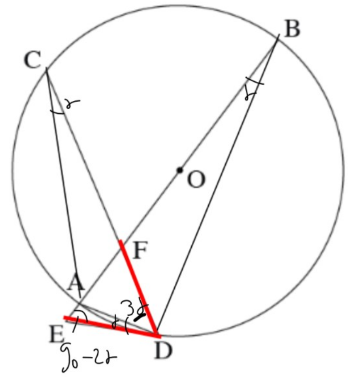
$$\frac{AD}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{FD}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\frac{AD}{\cos 2\alpha} = \frac{FD}{\cos\alpha} \rightarrow FD = AD\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2R\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$FD = \frac{R\cdot\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = R\cdot\tan 2\alpha$$

$$S_{\Delta AFD} = \frac{AD\cdot FD}{2}\cdot\sin 3\alpha = \frac{\cancel{2}R\sin\alpha\cdot R\cdot\tan 2\alpha}{\cancel{2}}\cdot\sin 3\alpha$$

$$\boxed{S_{\Delta AFD} = R^2\cdot\sin\alpha\tan 2\alpha\cdot\sin 3\alpha}$$



ד. (1) הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1+\sqrt{3}$.

מצא את α.

$$\measuredangle EAD = 180-(90-\alpha) = 90+\alpha$$

$$\boxed{\sin(90+\alpha) = \cos\alpha}$$

sin law ב ΔADE

$$\frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(90-2\alpha)}$$

$$AE = AD\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2R\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \frac{\frac{\cancel{FD}\cdot\cancel{AD}}{2}\cdot\sin 3\alpha}{\frac{\cancel{AD}\cdot\cancel{FD}}{2}\cdot\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$$

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1+\sqrt{3}$.

מצא את α.

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha} = 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1+\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\cancel{\sin\alpha}\cdot\cos 2\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} + \frac{2\cancel{\sin\alpha}\cdot\cos^2\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} = 1+\sqrt{3}$$

$$2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\alpha = 1+\sqrt{3}$$

$$4\cos^2\alpha = 2+\sqrt{3} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \longrightarrow \cos\alpha = 0.96$$

$$\alpha = 15^\circ$$

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה f(x) .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה f(x) המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=(-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה f(x) את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג–ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה f(x) , וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x) .

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה g(x) .

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של g(x) מעבירים אנך לציר ה־ x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה g(x) ועל ידי ציר ה־ x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$$

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה f(x) .

$$x^3-m\neq 0$$

$$x^3\neq m \rightarrow x\neq\sqrt[3]{m}$$

ת.ה: $\boxed{x\neq\sqrt[3]{m}}$

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$$

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה f(x) המאונכות לצירים.

אסימפטוטה אנכית

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{m}}\frac{x^3}{(x^3-m)^2}=\frac{+}{0}=\pm\infty$$

$x=\sqrt[3]{m}$

אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 \quad /:x^6}{(x^3-m)^2 \quad /:x^6}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{(1-\frac{m}{x^3})^2}=\frac{0}{1}=0$$

$y=0$

ידוע כי לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=(-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-m)^2-2(x^3-m)\cdot 3x^2\cdot x^2}{(x^3-m)^4}=\frac{2x(x^3-m)(x^3-m-3x^3)}{(x^3-m)^4}=$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-m)(-m-2x^3)}{(x^3-m)^4}$$

$$f'(-1)=0 \longrightarrow -2(-1-m)(-m+2)=0$$

$m=-1$ נפסל $(m>0)$

$m=2$

ולכן $m=2$

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2}{(x^3-2)^2}}$$

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג–ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

מתוך סעיף קודם:

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-2)(-2-2x^3)}{(x^3-2)^4}=0$$

$$2x(x^3-2)(-2-2x^3)=0$$

$x=0$ $\quad$ $x=\sqrt[3]{2}$ נפסל $\quad$ $x=-1$

$$\begin{array}{cccccccc} \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\ \hline & -1 & & 0 & & \sqrt[3]{2} & \end{array}$$

$f'(-2)=\frac{+}{+}>0$

$f'(-\frac{1}{2})=\frac{-}{+}<0$

$f'(\frac{1}{2})=\frac{+}{+}>0$

$f'(2)=\frac{-}{+}<0$

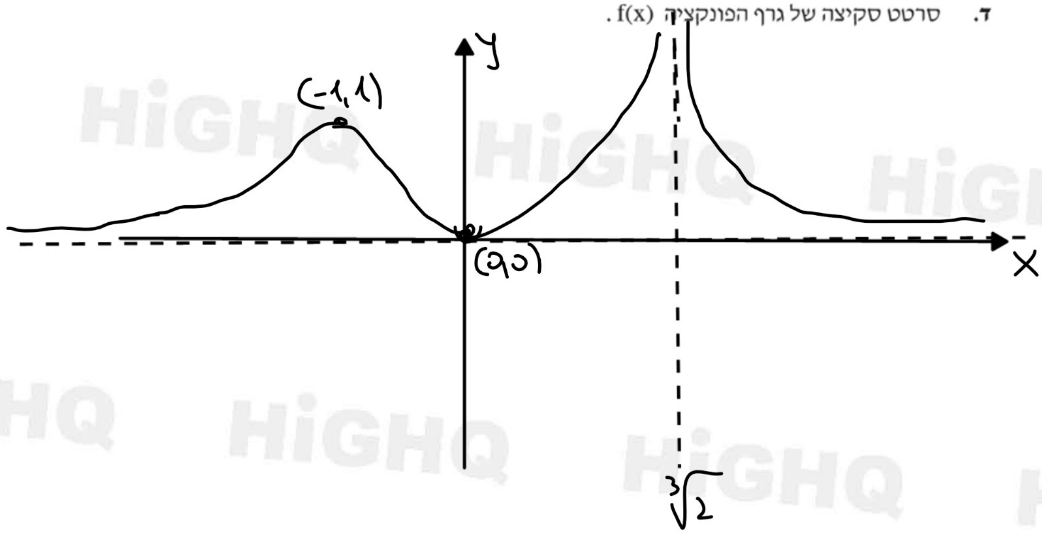
$f(-1)=\frac{1}{1}=1$

$(-1,1)$ Max

$f(0)=0$

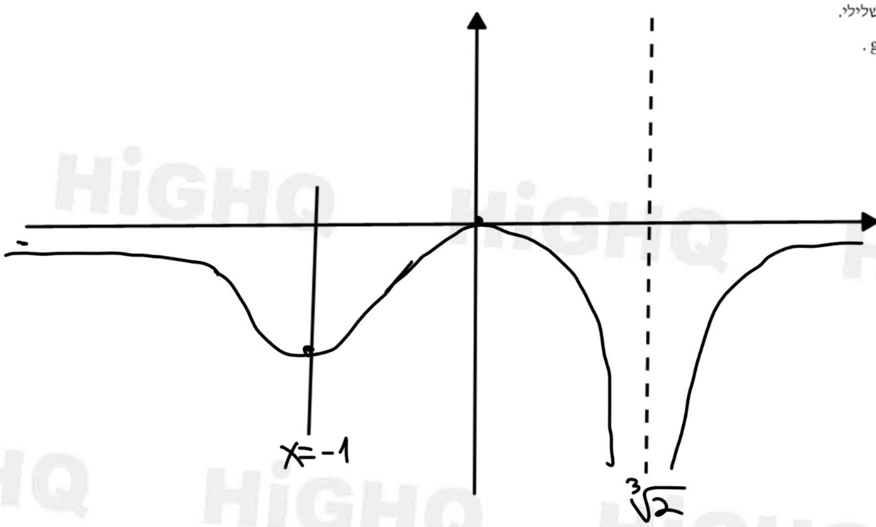
$(0,0)$ Min

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



k הופך את
הסימן של f(x)

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה־ x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .

$$\int_{-1}^{0}(0-g(x))\,dx=1 \rightarrow -k\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=1$$

$$-k\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(x^3-2)^2}\,dx = -k\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{3f^2(x)}\,dx = -\frac{k\cdot f^{-1}(x)}{-1\cdot 3}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{k}{3}\,\frac{1}{f(x)}\Big|_{-1}^{0} = \frac{k}{3}\cdot\frac{1}{(x^3-2)}\Big|_{-1}^{0} = \frac{k}{3}\left(\frac{1}{-2}+\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$-\frac{k}{18} = 1 \rightarrow k=-18$$

$$\boxed{k=-18}$$

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה־ x .

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

$x^2 - 2x \geq 0$

$x(x-2) \geq 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

לכן ת.ה $x \geq 2$ או $x \leq 0$

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

$$f'(x) = 3 + \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} \cdot (2x - 2)$$

$$f'(x) = 3 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

ולכן ת.ה $x > 2$ או $x < 0$

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.

אנכית

$$\lim_{x \to 2^+} 3 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}} = 3 + \frac{+}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} 3 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}} = 3 + \frac{-}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$
$x = 2$ אסימפטוטה אנכית

אופקית

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{2(x-1) \,/ : x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} \,/ x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{2 - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) = 3 + \frac{2 - \frac{2}{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\infty}}} = 3 + 2 = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{2(x-1)\ /:x}{\sqrt{x^2-2x}\ /x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right)=3+\frac{2-\frac{2}{\infty}}{-\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}}=3-2=1$$

אופקית

עבור	$x>2$	$y=5$
	$x<0$	$y=1$

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה־ x .

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

$$f'(x)=3+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}=0$$

$$3\sqrt{x^2-2x}+2(x-1)=0$$

$$3\sqrt{x^2-2x}=2(1-x)\quad /(\ )^2$$

* בהעלה בריבוע נוספים פתרונות ולכן יש להציב ולבדוק

$$9(x^2-2x)=4(1-x)^2$$

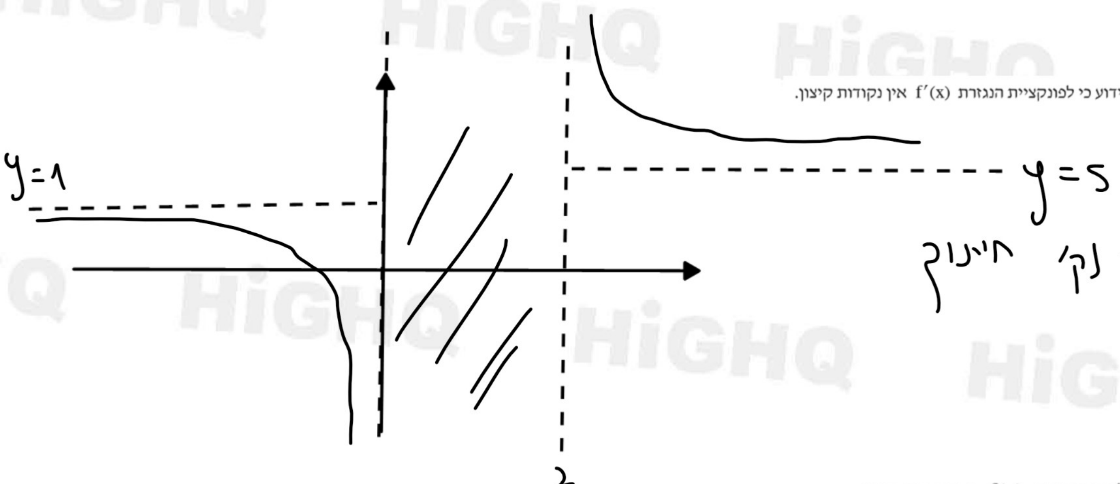
$$9x^2-18x=4-8x+4x^2$$

$$5x^2-10x-4=0$$

$x_1=-0.34$ $\quad$ $x_2=2.34$

נפסל

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

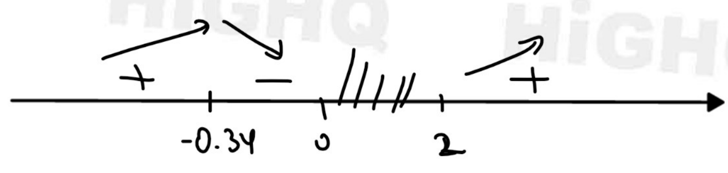


* אין נק' קיצון + נק' חיתוך

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נק' חיתוך של $f(x)$ מהווה נק' קיצון של $f(x)$

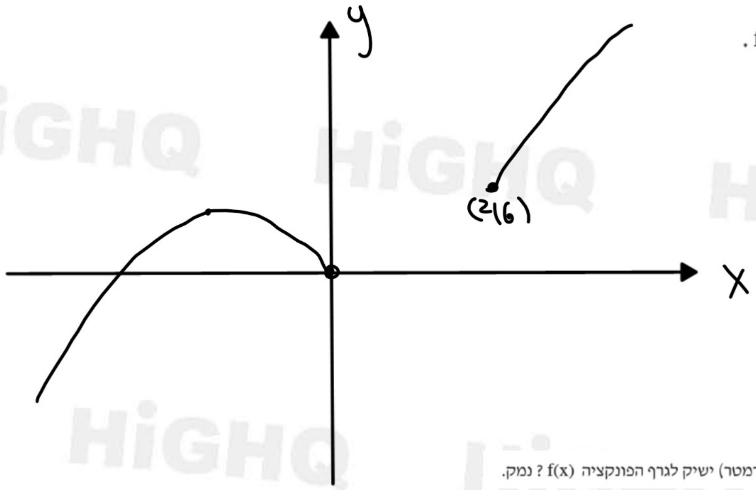
עפ"י תחומי חיוביות ושליליות של $f'(x)$ נקבע תעלייה/ירידה של $f(x)$



$$f(-0.34)=0.76$$

ולכן $(-0.34, 0.76)$ נק' Max

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



אין אסימפטוטות

$f(0)=0$

$f(2)=6$

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

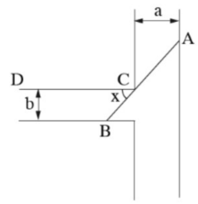
שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנק', כלומר $f'(x)=4$

עפ"י הגרף של $f'(x)$ ניתן לראות כי הערכים האפשריים ל $f'(x)$

$f'(x)>5$ או $f'(x)<1$ ולכן לא ניתן מקרה בו $f'(x)=4$

מסקנה: לא ייתכן משיק כזה

8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b.



הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית
ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).
מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיֵצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית,
יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.
הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

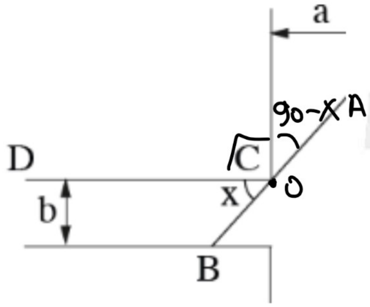
א. הבע באמצעות a, b ו־ x את אורך הסכר AB.

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b.

$180-90-x$



א. הבע באמצעות a, b ו־ x את אורך הסכר AB.

$$\sin(90-x) = \frac{a}{AO}$$

$$AO = \frac{a}{\sin(90-x)} = \frac{a}{\cos x}$$

$$\sin x = \frac{b}{BO}$$

$$BO = \frac{b}{\sin x}$$

$$AB = AO + BO = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

$$\boxed{AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}}$$

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

$$AB = \frac{2b}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

$$AB' = \frac{-2b}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \frac{b}{\sin^2 x} \cdot \cos x$$

$$AB' = \frac{2b\sin x}{\cos^2 x} - \frac{b \cdot \cos x}{\sin^2 x} = 0 \quad / \frac{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}{b}$$

$$2\sin^3 x - \cos^3 x = 0$$

$$2\sin^3 x = \cos^3 x \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$\sqrt[3]{2}\sin x = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \longrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \longrightarrow x = 38.44°$$

$$f'(x)=\frac{b\cdot(2\sin^3x-\cos^3x)}{\cos^2x\sin^2x}$$

$$f'(10^\circ)=\frac{-}{+}<0$$

$$f'(60)=\frac{+}{+}>0$$

$-\searrow \quad 38.44 \quad \nearrow +$

ולכן $X=38.44^\circ$ נק' Min

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8 . מצא את b .

$$AB=\frac{2b}{\cos x}+\frac{b}{\sin x}$$

$$8=\frac{2b}{\cos 38.44}+\frac{b}{\sin 38.44}=b(2.55+1.6)$$

$$b=1.923$$