high-q.co.il | 1-800-80-80-80

HiGHQ
מכינים אותך לעולם האמיתי

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

2021 מועד ב קיץ, שאלון 581 (806)

נכתב ע"י צוות המרצים של HiGHQ

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

מרצה זמין ב-Whatsapp
לכל שאלה, מרגע הרישום עד הבחינה

ריענון לפני הקורס
הגיעו מוכנים עם חומרי הכנה ייחודיים

ספריית שיעורים
כל השיעורים פתוחים לצפייה, בכל זמן ומכל מכשיר

סיכומי שיעורים
לא צריך לסכם! הכנו עבורכם סיכומי שיעורים מראש

לחצו לפרטים נוספים מיועץ לימודים >>

1. נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק"מ.

בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ"ש לכיוון נקודה B.

בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A.

שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ"ש לכיוון נקודה A.

נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן.

שעה ו־36 דקות אחרי שנטע ורוני נפגשו, הגיעה דניאלה לנקודה A.

המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.

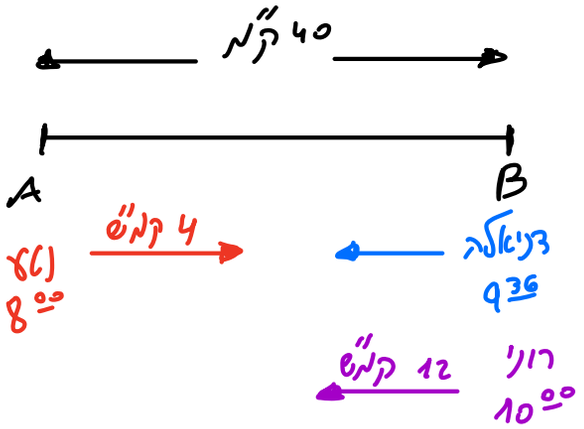
א. באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?

ב. מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.

ג. האם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.

כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.

ד. באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.



א) נסמן ב-t את הזמן שחלף מרגע יציאתה של רוני עד למפגש עם נטע.

זמן הליכתה של נטע עד למפגש: $2+t$

דרך נטע עד למפגש: $4(2+t)$

זמן הליכתה של רוני עד למפגש: t

דרך רוני עד למפגש: $12t$

סך הכל, שתיהן עברו 40 ק"מ לכן:

$$(2+t)4+12t=40 \rightarrow 16t=32 \rightarrow t=2$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

נעם ורוני נפגשו שעתיים לאחר יציאתה של רוני, כלומר ב- 12:00

ב) רוני הלכה 24 דקות לפני שרוני יצאה לדרך, נוסיף לזמן

זה שעתיים (עד הפגש) 1-1 שעה ו-36 דק' עד שהגיעה

דניאלה לנקודה A. סך הזמן שהייתה דניאלה בדרך: 0.4+2+1.6

מהירות דניאלה: 10 קמ"ש = $\frac{40}{4}$

ג) כדי לבדוק אם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת, נותר

רק לבדוק האם דניאלה הגיעה גם היא לנקודת המפגש

של נעם ורוני באותו הזמן.

לפי סעיף א' רוני הגיעה לנקודת המפגש לאחר שצעדה שעתיים

במהירות 12 קמ"ש, כלומר - 24 ק"מ מנקודה B בשעה 12:00.

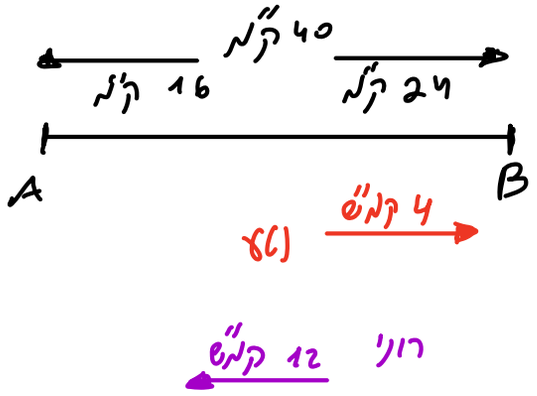
דניאלה, שיצאה ב- 9:36, צעדה עד שעה כ- 2.4 שעות

במהירות של 10 קמ"ש, כלומר עברה 10·2.4=24 ק"מ.

ולכן המתאמנות אכן נפגשו בנקודה אחת, בשעה 12:00,

24 ק"מ מנקודה B.

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה



ד) כדי להיפגש שוב, נגדיל את נעמ הגיעה לנק' B. עד לנק' B נעמ נסעה $\frac{24}{4}=6$ שעות

בינתיים רוני עברה $12\cdot 6=72$.

מכאן שקל לראות שהמרחקים נפגשו ליד הגיעה נעמ לנקודה B. כעת קל יותר לחשב את נקודת המפגש.

נניח שנעמ עברה מרחק x, כדי להיפגש עם רוני לעבור מרחק של $32+x$. יחס המרחקים כיחס המהירויות ולכן

$$\frac{32+x}{x}=3 \rightarrow 32+x=3x \rightarrow x=16$$

נעמ נסעה 16 ק"מ עד לנקודת המפגש ולכן הבנות נפגשו 8 ק"מ $=(24-16)$ מנקודה B.

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית a_n, שאיבריה a_1 , a_2 , a_3 , ... , והמנה שלה q .

א. הבע באמצעות a_1 ו־q את ערכי הסכומים שלפניך.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + ... + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q .

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין־סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n .

בונים סדרה הנדסית אין־סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $-\frac{1}{b_3}$, $\frac{1}{b_4}$, ...

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1 .

נתונה הסדרה: b_1 , a_1 , $\frac{1}{a_1}$.

ה. **(1)** האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

א)

סדרת B

$a_1^* = a_4 = a_1 q^3$

$q^* = q^4$

$n = 10$

$S = \frac{a_1 q^3 ((q^4)^{10} - 1)}{q - 1}$

$S = \frac{a_1 q^3 (q^{40} - 1)}{q^4 - 1}$

סדרת A

$a_1^* = a_2 = a_1 q$

$q^* = q^2$

$n = 20$

$S = \frac{a_1 q ((q^2)^{20} - 1)}{q - 1}$

$S = \frac{a_1 q (q^{40} - 1)}{q^2 - 1}$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

ב)

$$\frac{A}{B}=\frac{10}{9} \rightarrow \frac{\cancel{a_1 q}\,\cancel{(q^{50}-1)}}{q^2-1}\cdot\frac{(q^4-1)}{\cancel{a_1}\,q^{32}\,\cancel{(q^{50}-1)}}=\frac{10}{9}$$

$$\frac{q^4-1}{(q^2-1)\,q^2}=\frac{10}{9} \rightarrow \frac{\cancel{(q^2-1)}(q^2+1)}{\cancel{(q^2-1)}\,q^2}=\frac{10}{9}$$

$$10q^2=9q^2+9 \rightarrow q^2=9 \rightarrow q=\pm 3 \xrightarrow[\text{עולה}]{\text{סדרה}} q=3$$

ג)

$$b_n=3a_{n+1} \rightarrow b_{n+1}=3a_{n+2}$$

נחלק את המשוואות:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\cancel{3}a_{n+2}}{\cancel{3}a_{n+1}}=q=3$$

ד)

$$-\frac{1}{b_1},\ \frac{1}{b_2},\ -\frac{1}{b_3}\ \dots$$

ברור לראות שמנת סדרה זו היא $-\frac{1}{3}$

[ניתן שני איברים במקום כללי $\frac{1}{b_{n+1}}$, $-\frac{1}{b_n}$, נחלקם ונקבל: $-\frac{b_n}{b_{n+1}}=-\frac{1}{q}=-\frac{1}{3}$]

כאן זוהי סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת. נשתמש בנוסחה המתאימה ונקבל:

$$S_\infty=\frac{-\frac{1}{b_1}}{1+\frac{1}{3}} \rightarrow S_\infty=\frac{-1}{b_1}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3}{4b_1}$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

לפי הכללים: $b_1 = 3a_2 \rightarrow b_1 = 3a_1 \cdot q \rightarrow b_1 = 9a_1$

לכן:

$$S_\infty = \frac{-3}{36a_1} = \frac{-1}{12a_1}$$

ה) 1)

$$\frac{1}{a_1},\ a_1,\ b_1 \longrightarrow \frac{1}{a_1},\ a_1,\ 9a_1$$

אם הסדרה חשבונית ההכרח מתקיים:

$$a_1 - \frac{1}{a_1} = 9a_1 - a_1$$

$$a_1^2 - 1 = 8a_1^2 \rightarrow -1 = 7a_1^2 \rightarrow$$ אין פתרון

הסדרה אינה חשבונית.

2) אם הסדרה הנדסית ההכרח מתקיים:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{9a_1}{a_1} \rightarrow a_1^2 = 9 \rightarrow a_1 = \pm 3$$

אם הסדרה עולה (נתון) ואם נזכור ש: $q = 3$

הרי ש: $a_1 = 3$ ויתכן שהסדרה הנדסית

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר.

28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42 .

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

א) בהינתן שספורטאי עבר את שני המכשולים, ההסתברות שיעבור את המכשול השלישי היא 0.25, לכן ההסתברות שיעבור למחצי הגמר היא:

$0.25 \cdot 0.28 = 0.07$

ב) נסמן: "עבר ראשון": A

"עבר שני": B

נתון:

$p(A) \cdot p(\bar{B}) = 0.42$

$p(A) \cdot p(B) = 0.28$

מסעיף קודם ידוע ש:

נתבר את המשוואות:

$p(A)\underbrace{[p(B)+p(\bar{B})]}_{1} = 0.7$

$p(A) = 0.7 \rightarrow p(\bar{A}) = 0.3$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

ג) (1) נחשב את ההסתברות ל: "ידוע שעבר ראשון, הגיע לגמר".
מן הסעיף הקודם:

$$p(A)\cdot p(B) = 0.28$$

$$0.7\cdot p(B) = 0.28$$

$$p(B) = 0.4$$

מכיוון שספורטאי לא מגיע לגמר השני אם לא עבר את הראשון, ההסתברות להצלחה היא:

$$0.4\cdot 0.25 = 0.1$$

לכן, ההסתברות שבדיוק 2 עלו:

$$\binom{3}{2}\cdot 0.1^2\cdot 0.9^1 = 3\cdot 0.01\cdot 0.9 = 0.027$$

(2) כעת נדרוש ששניים ספציפיים יעלו לגמר:

$$0.1^2\cdot 0.9 = 0.009$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).

מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו־N,

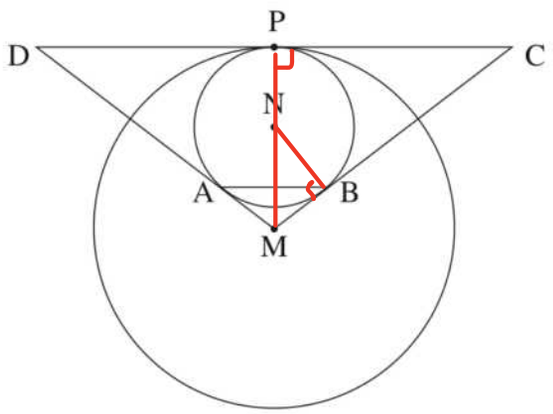
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו־R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.

מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.

מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו־B.

ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים

בנקודות C ו־D, כמתואר בסרטוט.



א. הוכח כי $AB \perp MN$.

ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצא את R_1 ואת R_2.

(2) מצא את DC.

הוכחה:

א) נמדר רדיוסים $AN=NB$

ב) $AM=BM$ משיקים מנקודה (M) מחוץ למעגל שווים זה לזה.

ג) $AMBN$ דלתון (לפי 1,2)

3) $AB \perp MN$ אלכסונים מאונכים בדלתון. מ.ש.ל א'

ד) $\measuredangle MPN = \measuredangle NPD = 90^\circ$ משיק משתלש מאונך לרדיוסים.

1) נקודות M, N, P על ישר אחד (לפי ה').

2) O, אמצע AB (סימון).

3) $\measuredangle MOA = \measuredangle MPD$ לפי ד', ה'.

$\Downarrow$

4) $AB \parallel DC$ אם זוויות מתאימות שוות, הישרים מקבילים.

מ.ש.ל ד'

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

י) $\measuredangle NBM = 90°$ זוויות בין משיק לרדיוס.

יא) $\triangle MBN \sim \triangle MPC$: $\measuredangle PMC$ משותפת, $\measuredangle MBN = \measuredangle MPC = 90°$, לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

יב) $\frac{MP}{MB} = \frac{PC}{BN} = \frac{MC}{MN}$ פרופורציה במשולשים דומים.

$\Downarrow$

יג) $NB \cdot MC = MN \cdot PC$

יד) $\measuredangle CMP = \measuredangle AMP$ זוויות הראש נתבות בדלתון (ג').

טו) $\triangle DMC$ שו"ש: במשולש הגובה (MP) הוא גם תיכון.

$\Downarrow$

טז) $PC = \frac{1}{2}DC$, MP גובה בשו"ש $\triangle DMC$ ולכן גם תיכון.

יז) $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{1}{2}DC$ הצבת טז' ב- יג'. מ.ש.ל ב'.

יח) $R_1 = \frac{7}{3}R_2$, $MN = 8$ נתונים.

יט) $R_2 + 8 = R_1$

$R_2 + 8 = \frac{7}{3}R_2$ הצבה יט' ב- יח'.

$\frac{4}{3}R_2 = 8$

$R_2 = 6$

$\downarrow$

$R_1 = 14$

כ) $8^2 = MB^2 + 6^2$ פיתגורס ב- $\triangle MBN$

$MB = \sqrt{28}$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

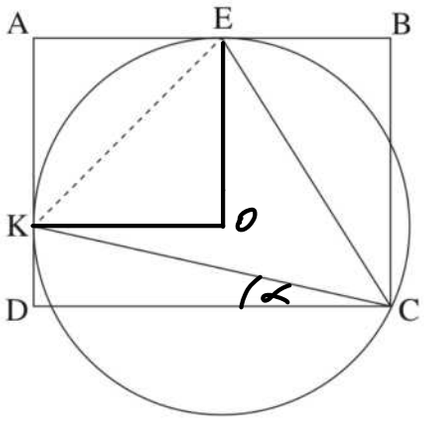
כא) $\frac{NB}{MB} = \frac{PC}{MP}$ מן הפרופורציה ד-יג.

כב) $\frac{6}{\sqrt{28}} = \frac{PC}{14}$ הצבה

כג) $PC = 6\sqrt{7}$ מישור

$DC = 2PC \rightarrow DC \sim 12\sqrt{7}$ לפי טג'

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה



5. המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו־AD, משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו־K בהתאמה (ראה סרטוט).
הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח: $\sphericalangle KCE = 45^o$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0^o < \alpha < 45^o$.

ב. **(1)** הבע באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו־α את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α.

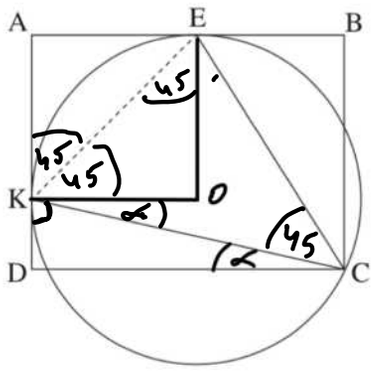
א) נסמן מרכז מעגל O. $\sphericalangle AEO = \sphericalangle AKE = 90^\circ$ (זוויות בין משיקים לרדיוסים).

מרובע AEOK ריבוע (שלוש זוויות ישרות ← מלבן,

2 צלעות סמוכות במלבן שוות (KO = OE = R) ← ריבוע.

$\sphericalangle ECK = 45^\circ$ זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית

($\sphericalangle KOE$) הנשענת על אותה הקשת. מ.ש.ל א'



בגלל השלמת זוויות לפי שרטוט

$180 - 45 - \alpha - 45 - 45 = \sphericalangle OEC = 45 - \alpha$

$\sphericalangle EKC = 45 + \alpha$, $\sphericalangle KEC = 90 - \alpha$, $\sphericalangle ECK = 45^\circ$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

ב) לפי משפט סינוסים ב- ΔKEC:

$$\frac{KC}{\sin(90-\alpha)} = 2R$$

$$KC = 2R\cos\alpha$$

$$\frac{KE}{\sin 45} = 2R \rightarrow KE = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2R \rightarrow KE = \sqrt{2}R$$

$$\frac{EC}{\sin(45+\alpha)} = 2R \rightarrow EC = 2R\sin(45+\alpha)$$

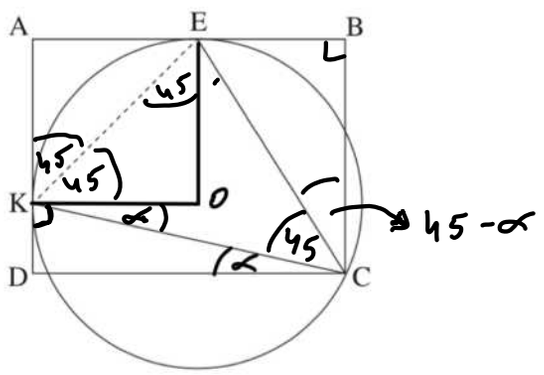
$$EC = 2R(\cos 45\sin\alpha + \sin 45\cos\alpha)$$

$$EC = 2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)$$

$$EC = \sqrt{2}R(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

ג) דרוש היחס $\frac{EB}{AE}$, אולם כבר ראינו שמרובע $AEOK$ הוא ריבוע ולכן $AE = R$.

ב- ΔEBC מתקיים:



$$\frac{EB}{EC} = \sin(45-\alpha)$$

$$\frac{EB}{\sqrt{2}R(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \sin(45-\alpha)$$

$$EB = \sqrt{2}R(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

$EB = \sqrt{2}R(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$EB = R(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \longrightarrow EB = R\cos 2\alpha \rightarrow \frac{EB}{R} = \cos 2\alpha$

$\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos 2\alpha = \cos 45$ (3

$2\alpha = \pm 45 + 360k \,/:2 \rightarrow \alpha = \pm 22.5 + 180k$

α מייצג זווית $\rightarrow$ $\alpha = 22.5^\circ$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הצֵב: $a=2$.

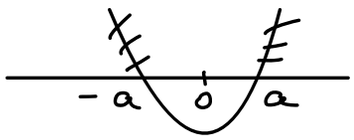
ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=3$ ו־ $x=4$.

$$F(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$a>0$

א) תחום הגדרה:

$(x-a)(x+a)>0$



$\rightarrow$ $x<-a$ או $x>a$

ב) זוגית: $F(-x)=F(x)$

$$F(-x)=\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-a^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=F(x)$$

אכן הפונקציה זוגית.

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

ב)(1) חיתוך עם ציר x: $y=0$

$$0=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$$ לא בתחום.

כלומר, אין חיתוך עם הצירים.

(2)

$$\lim_{x\to -a^-}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a}{0^+}=+\infty$$

הישרים שני אסימפטוטות אנכיות $x=-a$, $x=a$

בגלל קיום של אסימפטוטות אופקיות:

בשאיפה לאינסוף, מגמת החצקה במונה גדולה מזו שבמכנה ומכאן שאין אסימפטוטה אופקית.

הוא ההפוך כלומר, גם בשאיפה למינוס אינסוף אין אסימפטוטה אופקית.

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

(3)

$$F'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$$

$u = x^2 \quad v = \sqrt{x^2-a^2}$

$u' = 2x \quad v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$F'(x) = \frac{2x(x^2-a^2) - x^3}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$F'(x) = \frac{x^3 - 2xa^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = 0$$

$$x(x^2 - 2a^2) = 0$$

$x = 0$ לא בתחום

$x^2 = 2a^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}a$

x	$-2a$	$-\sqrt{2}a$	$-1.1a$	$-a<x<a$	$1.1a$	$\sqrt{2}a$	$-2a$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	/	$-$	0	$+$

(*) הביטוי המופיע בנגזרת: x^2-a^2, גדול מאפס (לפי תחום) ורק בם ר ביטוי זה. נבדוק רק את סימן המונה ונסתפק ב- 2 הנקודות (הפונקציה עולה ותתנהג באופן סימטרי מימין ומשמאל).

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

$x^3 - 2xa^2$ נתבונן במונה הנגזרת:

$x(x^2-2a^2) \xrightarrow{x=-2a} -2a(4a^2-2a^2)<0$

$x(x^2-2a^2) \xrightarrow{x=-1.1a} -1.1a(1.21a^2-2a^2)>0$

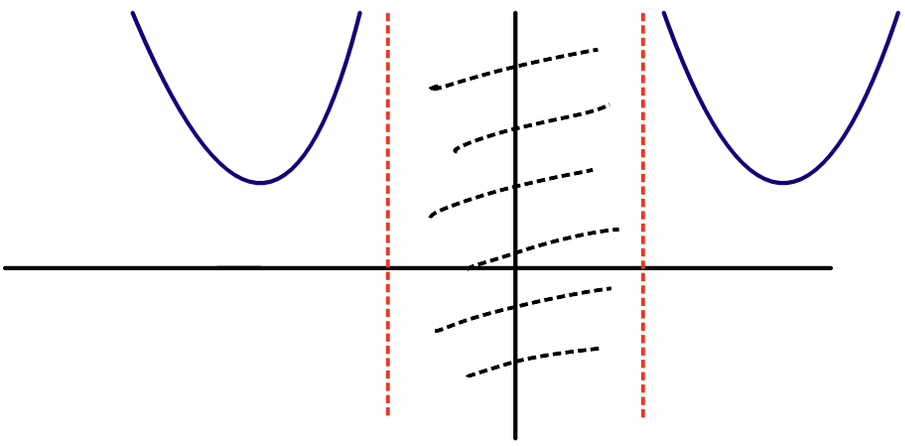
$$F(-\sqrt{2}a) = \frac{(-\sqrt{2}a)^2}{\sqrt{(-\sqrt{2}a)^2-a^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2}} = \frac{2a^2}{a} = 2a$$

$F(\sqrt{2}a) = 2a.$ מטעמי זוגיות:

כלומר קיבלנו:

$\min(-\sqrt{2}a, 2a)$

$\min(\sqrt{2}a, 2a)$



(4)

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

ג) נגזרת זה קרה לנקודת הקיצון אם הפונק' מקבלת קיצון:

$$g(x) = (F(x))^2 \rightarrow g'(x) = 2F(x)\cdot F'(x) = 0$$

$F(x) \neq 0$ לפי סעיפים קודמים $\qquad F'(x) = 0$

הקמ"מ נקודות חשודות פנימיות. קל לקבוע את סימן הנגזרת לפי השרטוט למעלה, כמו כן הצורות נשמרות ולכן גם הסימטריה:

$$g'(a < x < \sqrt{2}a) = 2\cdot(+)\cdot(-) = (-)$$

$$g'(x > \sqrt{2}a) = 2\cdot(+)\cdot(+) = (+)$$

כלומר נק' הקיצון שומרות על סדן גם לאחר ההצלבה קריטי.

$$g(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}a)^4}{(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = \frac{4a^4}{a^2} = 4a^2$$

כלומר רק שערי ה-y מקבלים קריטי וקיבלנו:

$\min(\sqrt{2}a, 4a^2)$, $\min(-\sqrt{2}a, 4a^2)$

מגדירים $g(x)$ תדשה:

$$g(x) = \frac{1}{[F(x)]^2}$$

נגזור את הפונק' ונקבל:

$$g'(x) = \frac{-2F(x)\cdot F'(x)}{[F(x)]^4}$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

כלומר לראות ששטחי ה-x של נק' הקשירות פחות.

ובסך הכולל נשמרת:

$$g'(a<x<\sqrt{2}a) = \frac{-2\cdot(+)\cdot(-)}{+} > 0$$

$$g'(x>\sqrt{2}a) = \frac{-2\cdot(+)\cdot(+)}{+} < 0$$

בנקודת הקיצון הופכת למקסימום

שטחי ה-y של הנקודות: $g(\sqrt{2}a) = \frac{1}{(F(\sqrt{2}a))^2} = \frac{1}{4a^2}$

כלומר $\max(\sqrt{2}a, \frac{1}{4a^2})$, $\max(-\sqrt{2}a, \frac{1}{4a^2})$

קיימת אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{F(x)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

בשני הצדדים (מצד ימין סימטרית)

ובמקום האסימפטוטות האנכיות:

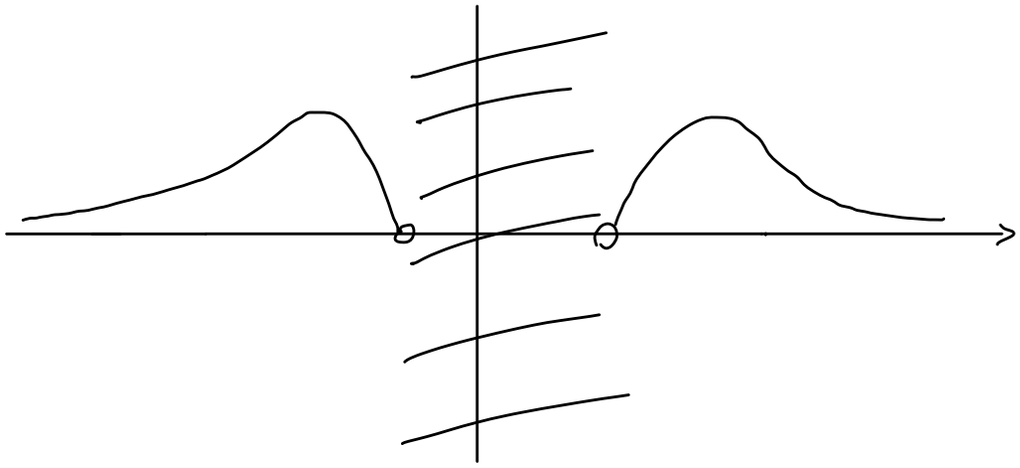
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{F^2(a)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

כלומר קיימות שתי נקודות תור:

$(a,0)$, $(-a,0)$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

כלומר גרף הפונקציה:



סעיף ו

$a = 2$

$$\int_3^4 \frac{x^2-4}{x^4}\,dx = \int_3^4 \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}\,dx$$

$$= \int_3^4 x^{-2} - 4x^{-4}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{4x^{-3}}{-3}\Big|_3^4$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{4}{3x^3}\Big|_3^4 = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{48}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{81}\right)$$

$$= 0.05478$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$.

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

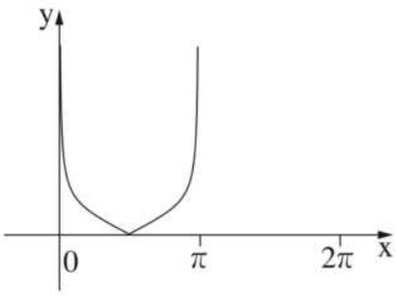
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

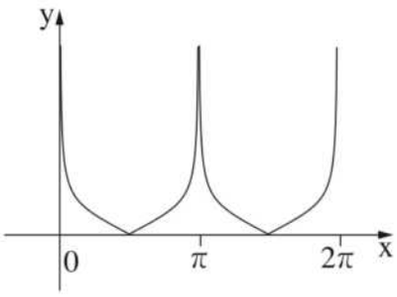
נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א–ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$.

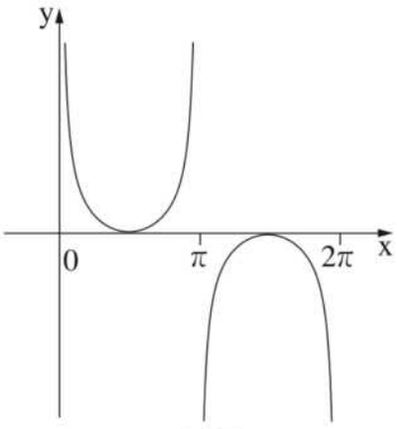
קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעותיך.



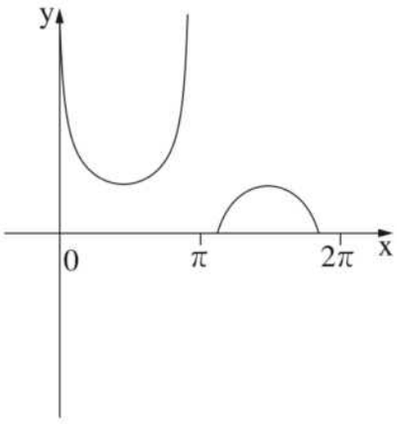
גרף א



גרף ב



גרף ג



גרף ד

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

א) $0 \le x \le 2\pi$ $\qquad F(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} + 3$

1) תחום הגדרה: $\sin x \neq 0$

בתחום: $x \neq 0,\ x \neq \pi,\ x \neq 2\pi \longrightarrow x \neq \pi k$

כלומר תחום ההגדרה: $\pi < x < 2\pi$ או $0 < x < \pi$

2) אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos^2 x}{\sin x} + 3 = \frac{1}{0^+} + 3 = \infty$$

$$\lim_{x \to \pi^\pm} \frac{\cos^2 x}{\sin x} + 3 = \frac{1}{0^\mp} + 3 = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to 2\pi^-} \frac{\cos^2 x}{\sin x} + 3 = \frac{1}{0^-} + 3 = -\infty$$

התקבלו שלוש אסימפטוטות אנכיות: $x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$

<u>אסימפטוטה אופקית</u>: הפונקציה בתחום הרלוונטי אינה שואפת ל- $\pm\infty$ ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

3) $u = \cos^2 x \quad v = \sin x$

$u' = -2\cos x \sin x \quad v' = \cos x$

$$F'(x) = \frac{-2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$F'(x) = \frac{-\cos x\,(2\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = 0$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

לפי זהויות: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$F'(x) = \frac{-\cos x\left(2\sin^2 x - 1 - \sin^2 x\right)}{\sin^2 x} = 0$$

$$-\cos x\left(\sin^2 x + 1\right) = 0$$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\sin^2 x + 1 = 0$

ϕ

$k = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$k = 1 \longrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

נקודות חשודות

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$F'(x)$	/	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$	/

מכיוון הנגזרת תמיד חיובי, נביט רק במונה כדי לקבוע סימן:

$$F'_{\text{מונה}}(x) = -\cos x\,\underbrace{\left(\sin^2 x + 1\right)}_{\text{תמיד חיובי}}$$

$$F'_{\text{מונה}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad , \quad F'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

נמצא את שיעורי ה-y של הנקודות:

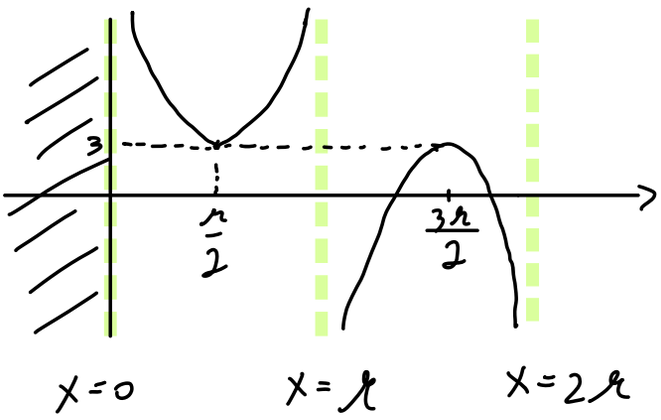
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 3 = 0 + 3 = 3$$

$\min\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + 3 = 3$$

$\max\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$

ב)



$g(x) = \sqrt{F(x) - 3}$, $k(x) = F(x) - 3$

$k(x)$ הינו הפונקציה אנכית של $F(x)$, 3 יחידות למטה, כלומר, ציר ה-x יהיה משיק לפונקציה בנקודות הקיצון. ולכן גרף g מתאים.

$g(x) = \sqrt{k(x)}$

נבדוק את תחומי ההגדרה של הפונקציה:

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} \geq 0$$

ראשית נמצא נקודות איפוס רלוונטיות לתחום:

$\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

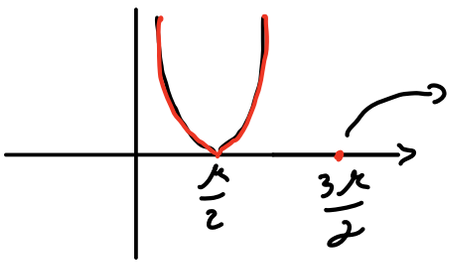
$\sin x = 0 \rightarrow x = \pi k \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

נבדוק ערכי חיוביות ושליליות:

	$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$\cos^2 x$	+	+	+	+
$\sin x$	+	+	−	−
$\frac{\cos^2 x}{\sin x}$	+	+	−	−

תחום ההגדרה הוא: $0 < x < \pi$ או $\frac{3\pi}{2}$

עבור $x = \frac{3\pi}{2} \Leftarrow y = 0$. הסרטוט הדומה ביותר לשרטוט המצוין הוא גרף א' (בעזרת מה הייתה טעות בבחינה).

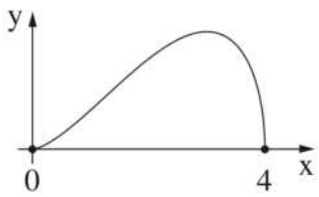


נק' נוספת שאינה מופיעה בשרטוט.

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

8. בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה $f(x)=\sqrt{a\cdot x^4+b\cdot x^3}$.

נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $0\le x\le 4$.



א. **(1)** הוכח כי $b=-4\cdot a$.

(2) לפניך שתי טענות I–II . רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $a>0\,,\,b<0$.

II. $a<0\,,\,b>0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם היא בתחום $0\le x\le 4$. מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה־x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה־x , ו־O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה־x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה־x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO .

ד. אם ידוע כי שיעור ה־x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ <u>אינה</u> יורדת, מהו שיעור ה־x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

א) (1) לפי תחום ההגדרה הנתון מתקיים: $ax^4+bx^3\geq 0$

כלומר $x=0,4$ הם שורשי ה-x של קבה התחום.

נציב $x=4$:

$256a+64b=0 \rightarrow b=-4a$

(2) תחום ההגדרה נקבע, לפי סעיף קודם, אי השוויון

$ax^4-4ax^3\geq 0$

$ax^3(x-4)\geq 0 \rightarrow$ $x-4$ שלילי או אפס בתחום

x^3 חיובי או אפס בתחום

אם שאי השוויון יתקיים, בהנחה ש: $a\neq 0$, $a<0$

ולפי סעיף (1) $b>0$. כלומר טענה II נכונה

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

ב) נסמן: $0 \le x \le 4$

$(F(x))^2 = g(x)$

$g(x) = ax^4 - 4ax^3$

$g'(x) = 4ax^3 - 12ax^2 = 0$

$4ax^2(x-3) = 0 \rightarrow$ הקיצוניות נקודות חשודות ב- $x=0$, $x=3$

נבדוק שזה:

$g''(x) = 12ax^2 - 24ax$

$g''(0) = 0$, $g'''(x) = 24ax - 24a \rightarrow g'''(0) = -24a < 0$

בנק' $(0,0)$ הקיצוניות נקודת פיתול (אבל מגילא אין צורך לבדוק היות ולהלן קבה התחום)

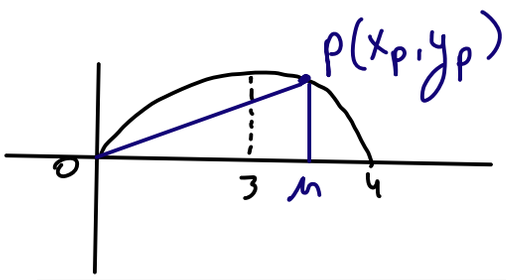
$g''(3) = 108a - 36a > 0 \rightarrow max$

$g(3) = 81a - 108a = -27a \xrightarrow{a<0} (3,-27a)$

כלומר הקיצוניות נקודת מקסימום: $max(3,-27a)$

נבדוק את קבה התחום הנוסף: $g(4) = 0 \rightarrow (4,0)$

מכאן שסקיצה של הפונק':



בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

נסמן: $P(x_p, y_p)$:

אורך קמ הוא:

$$y_p = ax_p^4 - 4ax_p^3$$

$$MP = ax_p^4 - 4ax_p^3$$

$$OM = x_p$$

$$Z(x_p) = (ax_p^4 - 4ax_p^3) \cdot \frac{1}{2}x_p$$

$$Z(x_p) = \frac{1}{2}ax_p^5 - 2ax_p^4$$

$$Z'(x_p) = 2.5ax_p^4 - 8ax_p^3 = 0$$

$$ax_p^3(2.5x_p - 8) = 0$$

$x_p = 0$ ⇓ נפסל, זה נק' הקצה (שכמובן מניבה מינימום).

$x_p = 3.2$

$-1048.576a$

נבדוק שזה:

$$Z''(x_p) = 10ax_p^3 - 24ax_p^2$$

$$Z''(3.2) = 327.68a - 245.76a < 0 \rightarrow \text{max}$$

$$Z(3.2) = 167.77216a - 209.7152$$

ג)

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

$z(3.2) = -41.94304a$

כן לפי השרטוט הנתון, $F(x)$ אינה יורדת עבור $0 < x \leq 3$. לפי נתון: $0 < x_p \leq 3$.

ברור שה שטח המקסימלי מתקבל בנקודת המינימום, כלומר $x_p = 3$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה