פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

מועד א מיוחד, קיץ 2021,
שאלון 582 (807)

נכתב ע"י צוות המרצים של HiGHQ

.1 נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a\,,-1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a\,,1)$ הוא קו ישר. הבע את משוואת הישר באמצעות a.

נתון הישר $y=-ax$.

ב. מצא לאילו ערכים של a, הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א ניצבים זה לזה.

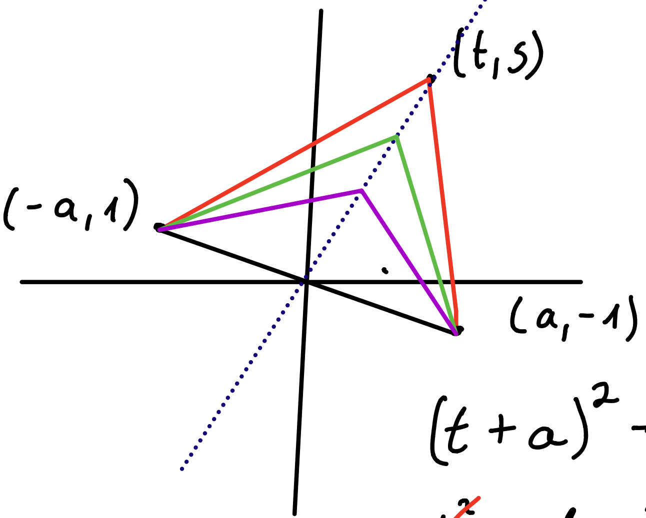
הישר שמצאת בסעיף א והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו־ N. מרכזי שני המעגלים מונחים על ציר ה־ x, המעגל M נמצא מימין לציר ה־ y, והמעגל N נמצא משמאל לציר ה־ y.

נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N.

ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו־ N.

נתון הישר $-x+\sqrt{17}\,y-8=0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו־ N.

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.



א) באופן כללי, תחת הנחה ש: $a>0$:

קל לראות שאוסף כל הנקודות הוא האנך האמצעי לקטע הנוצר בין שתי הנקודות הנתונות:

$$(t+a)^2+(s-1)^2=(t-a)^2+(s+1)^2$$

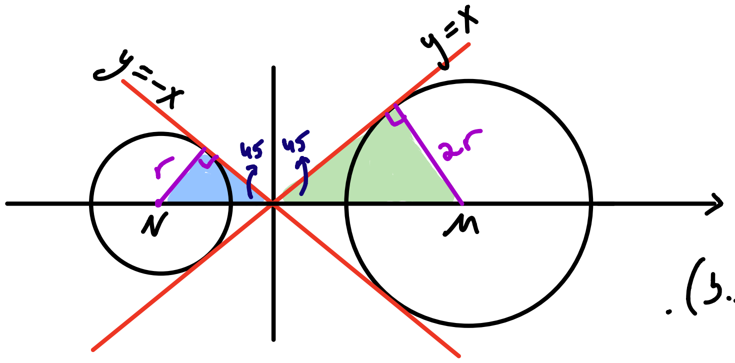
$$\cancel{t^2}+2at+\cancel{a^2}+\cancel{s^2}-2s+\cancel{1}=\cancel{t^2}-2at+\cancel{a^2}+\cancel{s^2}+2s+\cancel{1}$$

$$4at=4s/:4\rightarrow at=s\rightarrow y=ax$$

ב) כדי שהישרים יהיו מאונכים צריך להתקיים:

$$a\cdot(-a)=-1$$

$$a^2=1\rightarrow a=\pm1$$



ג) הזווית הנוצרת בין המשיקים לציר ה-x:

$\tan^{-1}(1)=45^\circ$

$\tan^{-1}(-1)=135^\circ$

ניתן לראות שהמשולש הירוק והמשולש הכחול בהכרח דומים (ז.ז).

מכאן ש: $OM = 2ON \rightarrow x_M = -2x_N$ ⊛

נתון: $x_M - x_N = 6 \rightarrow x_M = 6 + x_N$

נציב ב- ⊛ ונקבל: $-2x_N = 6 + x_N \rightarrow \boxed{x_N = -2}$

$\boxed{x_M = 4} \rightarrow M(4,0)$

נמצא את אורך רדיוס מעגל M באמצעות נוסחת מרחק נקודה מישר: $M(4,0)$, $y - x = 0$

$$2r = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{2}} \rightarrow 2r = 2\sqrt{2} \rightarrow r = \sqrt{2}$$

כלומר משוואת מעגל N:

$$(x+2)^2 + y^2 = 2$$

משוואת מעגל M:

$$(x-4)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 8$$

ג) נתון ישר המשיק למעגלים: $-x + \sqrt{17}y - 8 = 0$

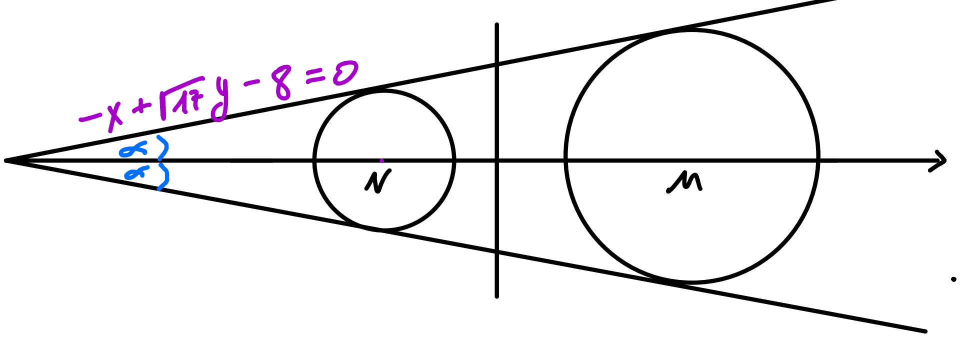
נמצא משיק נוסף בגישה גיאומטרית

שיפוע המשיק הנתון: $m = \frac{1}{\sqrt{17}}$

נסמן את הזווית הנוצרת עם ציר ה-x ב-α

ציר ה-x מהווה חוצה זווית (ישר המתחבר נקודה מחוץ למעגל למרכז המעגל, חוצה את הזווית הנוצרת בין שני המשיקים למעגל היוצאים מן הנקודה).

כלומר, הזווית של המשיק הנוסף היא $-\alpha$



$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{17}} \,/\cdot(-1) \rightarrow \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{-\sin\alpha = \sin(-\alpha)}{\cos\alpha = \cos(-\alpha)} \rightarrow \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow \tan(-\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

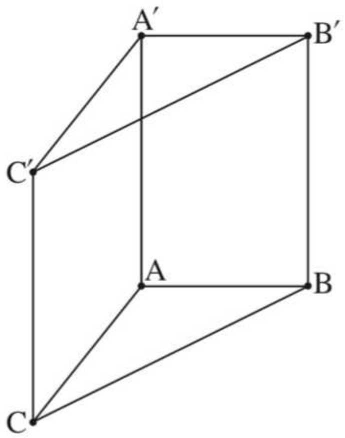
כלומר שיפוע המשיק הנוסף הוא השיפוע הנגדי.

נמצא את הנקודה ממנה יוצאים המשיקים, על ציר ה-x:

$$y=0 \rightarrow -x-8=0 \rightarrow x=-8 \rightarrow (-8,0)$$

לכן משוואת המשיק הנוסף היא:

$$y-0 = -\frac{1}{\sqrt{17}}(x+8) \rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{17}}x - \frac{8}{\sqrt{17}} \rightarrow \sqrt{17}\,y + x + 8 = 0$$



.2 בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$,
שהבסיס שלה הוא המשולש ABC .
נתון המספר k שבעבורו: $\overrightarrow{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$,
$\overrightarrow{AC} = (k+1, 0, k-3)$, $\overrightarrow{AB} = (k-1, k, 3)$.

א. מצא את ערכו של k .

המקצועות AC ו־ BC מונחים על הישרים ℓ_{AC} ו־ ℓ_{BC} בהתאמה:

$$\ell_{AC}: \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$
$$\ell_{BC}: \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ג. חשב את גודל הזווית $C'A'B'$.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש $A'B'C'$. נמק.

פאות של מנסרה ישרה הן מלבנים:

$AA' \perp AB$

$(k-1, k-7, k+1) \cdot (k-1, k, 3) = 0 \rightarrow k^2 - 2k + 1 + k^2 - 7k + 3k + 3 = 0$

$2k^2 - 6k + 4 = 0 \rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow (k-1)(k-2) = 0$

$k = 1 \qquad k = 2$

בנוסף, מקצועות הצד מאונכות למישור הבסיס ולכן לכל וקטור המוכל בבסיס:

$AA' \perp AC \rightarrow (k-1, k-7, k+1) \cdot (k+1, 0, k-3) = 0$

$k^2 - 1 + k^2 - 2k - 3 = 0$

$2k^2 - 2k - 4 = 0 \rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow (k-2)(k+1) = 0$

$k = 2 \qquad k = -1$

על מנת ששני התנאים יתקיימו, $k = 2$

ב) נמצא את משוואת המישור A'B'C' בעזרת הוקטורים הבלתי תלויים:

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (1,2,3)$

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{A'C'} = (3,0,-1)$

נמצא את וקטור המקדמים:

$$\begin{cases} (1,2,3)(a,b,c) = 0 \rightarrow a + 2b + 3c = 0 \quad (*) \\ (3,0,-1)(a,b,c) = 0 \rightarrow 3a - c = 0 \rightarrow c = 3a \end{cases}$$

נציב $a = 1$ ונקבל: $c = 3$ נציב ב- $(*)$ ונקבל:

$1 + 2b + 9 = 0 \rightarrow 2b = -10 \rightarrow b = -5$

כלומר משוואת המישור המבוקשת היא: $x - 5y + 3z + D = 0$

כדי למצוא את D, אנו זקוקים לנקודה על המישור,

- נמצא את נק' C בעזרת השוואת הישרים הנתונים:

$$\begin{cases} 8 + 3t = 4 + 2m \longrightarrow 4 + 3t = 1 \rightarrow 3t = -3 \rightarrow t = -1 \\ -1 = -2m \longrightarrow m = \frac{1}{2} \\ -1 - t = 2 - 4m \rightarrow -1 + 1 = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0 \checkmark \end{cases}$$

$x_c = 8 - 3, \quad y_c = -1, \quad z_c = -1 + 1$

$c(5,-1,0)$

נציב ש:

$\overrightarrow{cc'} = \overrightarrow{AA'} = (1,-5,3)$

$x_{c'} - x_c = 1 \longrightarrow x_{c'} - 5 = 1 \rightarrow x_{c'} = 6$

$y_{c'} - y_c = -5 \longrightarrow y_{c'} + 1 = -5 \rightarrow y_{c'} = -6$

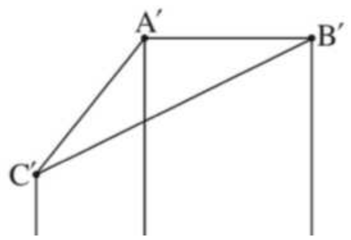
$z_{c'} - z_c = 3 \longrightarrow z_{c'} - 0 = 3 \rightarrow z_{c'} = 3$

מכאן: $C'(6,-6,3)$, נציב נקודה זו במשוואה שמצאנו לעיל ונקבל:

$$6-5\cdot(-6)+3\cdot 3+D=0$$

$$6+30+9+D=0 \to D=-45$$

$$x-5y+3z-45=0$$



ג) כדי למצוא את הזווית $C'A'B'$, נמצא את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\vec{A'B'}$ ו- $\vec{A'C'}$

$$\vec{A'C'}=(3,0,-1)$$

$$\vec{A'B'}=(1,2,3)$$

$$\vec{A'C'}\cdot\vec{A'B'}=3+0-3=0$$

$$\downarrow$$

$$\angle C'A'B'=90^\circ$$

3) מרכז המעגל החוסם את משולש ישר הזווית $A'C'B'$ נמצא באמצע הקוטר $C'B'$ (מול זווית 90° שמצאנו בסעיף הקודם).

$$|\vec{A'C'}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10},\quad |A'B'|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

לפי פיתגורס: $|\vec{B'C'}|=\sqrt{24}$

נסמן את אמצע $B'C'$ כנקודה M, מכאן ש: $C'M=\frac{\sqrt{24}}{2}=\sqrt{6}$

משוואת $B'C'$: $(6,-6,3)+t(2,-2,-4)$

נק' כללית של $B'C'$: $M(6+2t,-6-2t,3-4t)$

נדרוש שמרחק M מ-C' יהיה שווה ל- $\sqrt{6}$.

$C'(6,-6,3)$

$$\sqrt{6} = \sqrt{(6-6-2t)^2+(-6+6+2t)^2+(3-3+4t)^2}/(1)^2$$

$$6 = 4t^2+4t^2+16t^2 \rightarrow 6=24t^2 \rightarrow \frac{1}{4}=t^2$$

$$t=\pm\frac{1}{2}$$

היות ווקטור הכיוון הוא $\vec{B'C'}$ ווקטור העתקה הוא C'

נבחר את הסקלר השלילי כדי לקבל את אמצע $B'C'$

כלומר:

$$M\left(6+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right), -6-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right), 3-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$M(5,-5,5)$$

.3 נתונה משוואה I: $w^2-4iw-4+2i=0$. w הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I .

נתונה משוואה: $z^3=a+bi$. z הוא מספר מרוכב, a ו־ b הם מספרים ממשיים.

ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1–3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a=0\ ,\ b>0$
2. $a<0\ ,\ b=0$
3. $a\neq 0\ ,\ b\neq 0$

נתונה משוואה II: $z^3=2(w_1+w_2)$, w_2 ו־ w_1 הם הפתרונות של משוואה I .

ג. פתור את משוואה II .

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה $u=di$, d הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים.

מצא את שתי האפשרויות.

$$w_{1,2}=\frac{4i\pm\sqrt{(-4i)^2-4(-4+2i)}}{2}$$

$$w_{1,2}=\frac{4i\pm\sqrt{-16+16-8i}}{2}$$

$$w_{1,2}=\frac{4i\pm\sqrt{-8i}}{2}$$

סימון: $8i=z^2 \leftarrow -8i=(a+bi)^2$

$0=a^2-b^2\rightarrow a=\pm b\rightarrow a=-b$

$-8=2ab\rightarrow -4=ab\rightarrow -4=-b^2\rightarrow b=-2$

נבחר: $a=2, b=-2$:

$$w_{1,2}=\frac{4i\pm(2-2i)}{2}\rightarrow \boxed{w_1=1+i}\ ,\ \boxed{w_2=-1+3i}$$

ב)

נסמן את אחד הפתרונות
כ: $z = x+yi$
נתון ש: $x=0$
וגם: $y<0$

$z^3 = a+bi$

$(x+yi)^3 = a+bi$

$(0+yi)^3 = -y^3 i = a+bi$

$y^3<0 \rightarrow -y^3>0 \rightarrow \boxed{b>0,\ a=0}$

תשובה 1 נכונה

ג)

$z^3 = 2(w_1+w_2)$

$z^3 = 2(1+i-1+3i) \rightarrow z^3 = 8i \rightarrow z^3 = 8cis90 \quad /\sqrt[3]{\ }$

$z_k = 2cis\left(\frac{90+360k}{3}\right)$

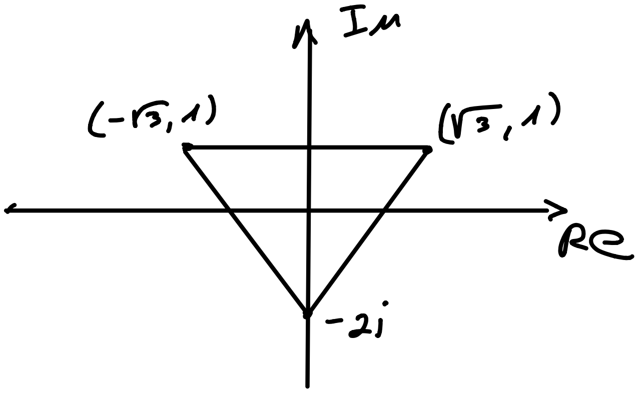
$\rightarrow z_0 = 2cis30 \rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow z_1 = 2cis150 \rightarrow 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$\rightarrow z_2 = 2cis270 \rightarrow 2(0-i)$

$z_0 = \sqrt{3}+i$, $z_1 = -\sqrt{3}+i$, $z_2 = -2i$

3)



ה) אם מוסיפים את a לכל פתרון נקבל:

$z_0=\sqrt{3}+(1+a)i$

$z_1=-\sqrt{3}+(1+a)i$

$z_2=(-2+a)i$

על מנת שהמעגל החוסם את המשולש החדש יעבור בראשית הצירים, נדרוש שהנק' $(0,0)$ תה"יה אחד הפתרונות:

עבור $a=2$ נקבל:

$z_0=\sqrt{3}+3i$, $z_1=-\sqrt{3}+3i$, $z_2=0$

כי למעשה הזזה אנכית של המשולש המקורי 2 יחידות למעלה.

האפשרות השנייה היא הזזה אנכית כלפי מטה:

משוואת המעגל הקנוני לפני ההזזה:

$$x^2+y^2=4$$

כדי שמעגל זה ישיק ב-$(0,0)$

יש להוריד ב-2 יחידות כלומר $a=-2$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון הישר: $g(x) = a \cdot x$, a הוא פרמטר.

ידוע כי $g(1) = f(1)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $g(x)$.

א) 1) תחום הגדרה: $\boxed{\text{כל } x}$ $\longleftarrow$ $e^x + e^{-x} \neq 0$

e^x: ביטוי חיובי

e^{-x}: ביטוי חיובי

2) אסימפטוטה אנכית: אין (הפונק' מוגדרת לכל x).

אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)}$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1 \longrightarrow \boxed{y = 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x} - 1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x} + 1)} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \longrightarrow \boxed{y = -1}$$

3) תחומי עליה וירידה:

$$F(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$u=e^x-e^{-x} \qquad v=e^x+e^{-x}$$
$$u'=e^x+e^{-x} \qquad v'=e^x-e^{-x}$$

$$F'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$F'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$F'(x)=1-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2=0$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\pm 1$$

$$e^x-e^{-x}=e^x+e^{-x}$$
$$0=2e^{-x}\rightarrow \phi$$

$$e^x-e^{-x}=-e^x-e^{-x}$$
$$2e^x=0\rightarrow \phi$$

לפונק' אין נקודות קיצון. נבדוק את שיפוע הפונק',
למשל, ב- $x=0$ ונקבל:
$$F'(0)=1-\left(\frac{1-1}{1+1}\right)>0$$
מכאן שהפונק' עולה בכל תחום ההגדרה.
ירידה: אין.

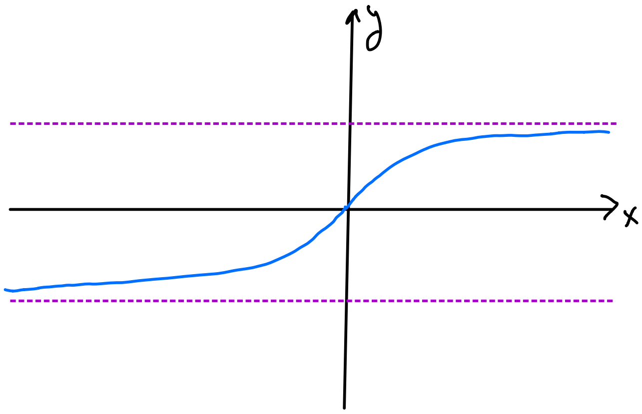
4)

$$F(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ , \quad F(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=$$

$$\frac{-(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}=-F(x)\rightarrow$$

כלומר, הפונקציה אי זוגית.

ב)



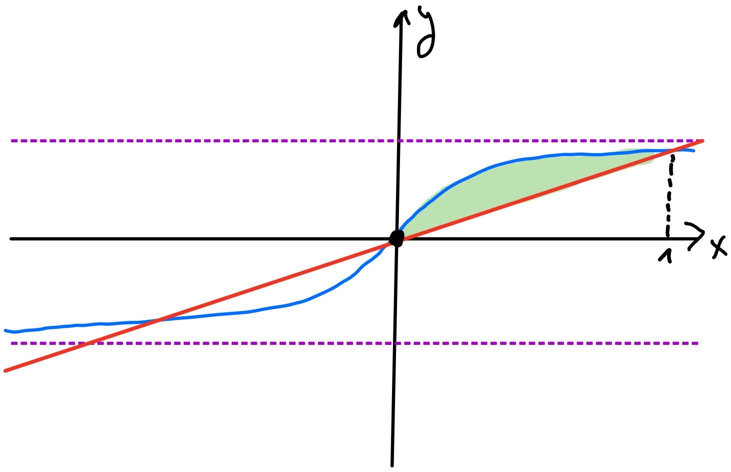
ג) נתונים:

$g(1) = F(1) \qquad g(x) = ax$

$$g(1) = a \longrightarrow a = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}$$

$$a = \frac{e - \frac{1}{e}}{e + \frac{1}{e}} = \frac{\frac{e^2 - 1}{e}}{\frac{e^2+1}{e}} = \frac{e^2-1}{e^2+1} \sim 0.762$$

$a \sim 0.762$



3) מכיוון שהפונק' אי זוגית,
נחשב רק את השטח הירוק
ברביע הראשון בגבולות
בין 0 ל-1.

אבל איך נדע שהשטח הכלוא
נמצא בין 0 ל-1 ובתחום
זה מתקיים: $F(x) > g(x)$?

כשגזרנו את $F(x)$ ראינו שמתקיים: $F'(x) = 1 - F^2(x)$

נגזור שוב ונקבל: $F''(x) = -2F(x) \cdot F'(x)$

עבור $x<0$, לפי שרטוט: $F''(x) = (-2)\cdot(-)\cdot(+) > 0$ ← הפונק' קעורה כלפי מעלה.

עבור $x>0$ " " $F''(x) = (-2)\cdot(+)(+) < 0$ ← הפונק' קעורה כלפי מטה.

כלומר קיימת נקודת פיתול אחת בלבד בראשית הצירים.

היות ו- $g'(x) = 0.76$, $F'(0) = 1$ ו- $\lim\limits_{x \to \infty} F'(x) = 0$, $F(x) > g(x)$ בין 0 ל-1.

$$\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} - 0.762x\,dx$$

ראינו בתהליך הגזירה שהמכנה הווה נגזרת המונה. (ולהיפך).

$\boxed{\text{נסמן } e^x+e^{-x}=z}$

$$2\cdot\int_0^1 \frac{z'}{z}dx - \frac{0.762x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\cdot\left(\ln|e^x+e^{-x}|_0^1 - 0.3808\right)$$

$$=2\cdot\left[\ln\left(e+\frac{1}{e}\right)-\ln(e^0+e^0)-0.3808\right]=2\cdot\left[0.43378-0.3808\right]\sim 0.106$$

.5 נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = x \cdot (\ell n(x))^n$, $n \geq 1$ הוא מספר טבעי.

א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי־זוגי. אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

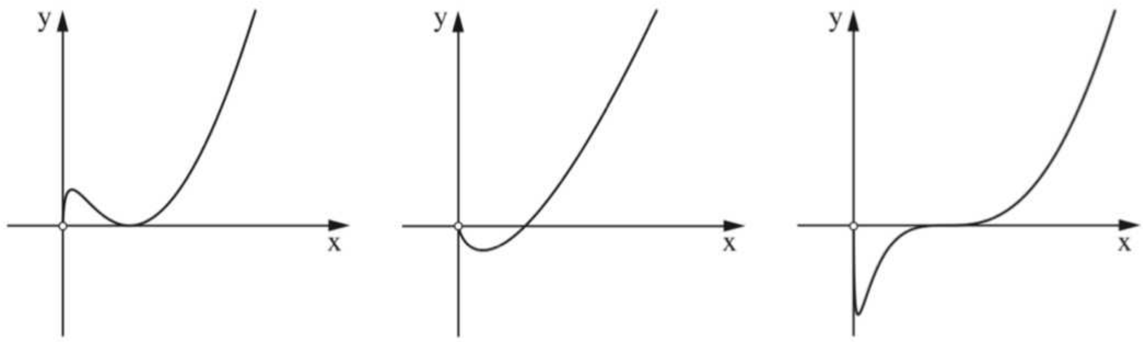
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. כל אחד מן הגרפים א–ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.

קבע איזה גרף יכול להתאים ל־ $n = 1$, איזה גרף יכול להתאים ל־ $n = 2$ ואיזה גרף יכול להתאים ל־ $n = 3$.

נמק את קביעותיך.



גרף ג **גרף ב** **גרף א**

נתונה הפונקציה: $g(x) = \dfrac{1}{x \cdot (\ell n(x))^2}$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{e}$ ו־ $x = \frac{1}{e^2}$.

א)	n זוגי	n אי זוגי
1) תחום	$x > 0$	$x > 0$
2) עליה/ירידה	$F'(x) = (\ln x)^n + n\cancel{x}(\ln(x))^{n-1} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$ $(\ln x)^{n-1}(\ln x + n) = 0$ $\ln x = 0$ $\ln x = -n$ $x = 1$ $x = \frac{1}{e^n}$	

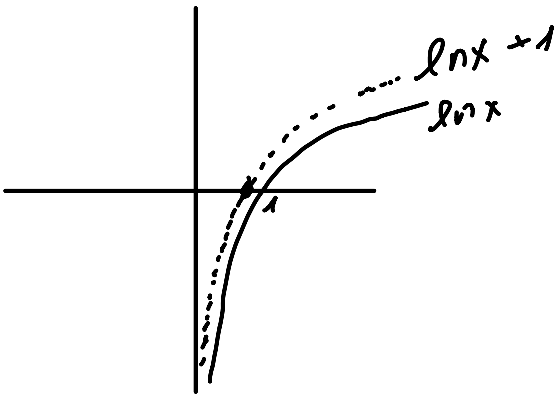
$$F'(x) = \ln x + 1 = 0$$

$$e^{-1} = x \to x = \frac{1}{e}$$

עבור $n=1$

עליה: $x > \frac{1}{e}$

ירידה: $0 < x < \frac{1}{e}$



עבור n זוגי:

$$F'(x) = (\ln x)^{2k-1}(\ln x + 2k) = 0$$

x	0	$\frac{1}{e^{2k+1}}$	$\frac{1}{e^{2k}}$	$\frac{1}{e^{2k-1}}$	1	e
$F'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$

$$F'(e^{-2k-1}) = [\ln(e^{-2k-1})]^{2k-1} \cdot (\ln(e^{-2k-1}) + 2k)$$

$$= (-2k-1)^{2k-1} \cdot (-\cancel{2k} - 1 + \cancel{2k})$$

שלילי   אי זוגי

שלילי

שלילי $\cdot \; (-1) > 0$

$$F'(e^{-2k+1}) = [\ln(e^{-2k+1})]^{2k-1} (\ln(e^{-2k+1}) + 2k)$$

$$= (-2k+1)^{2k-1} \cdot (\underbrace{-2k+1+2k}_{+1})$$

שלילי   אי זוגי

$$(-)\cdot(+) < 0$$

$$F'(e) = (\ln e)^{2k-1}(\ln e + 2k)$$

$$1 \cdot (+) > 0$$

עלייה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$ או $x > 1$

ירידה: $\frac{1}{e^n} < x < 1$

עבור n אי זוגי:

$n = 2k+1$, $n \neq 1$.

$$F'(x) = (\ln x)^{2k}(\ln x + 2k + 1)$$

x	0	$\frac{1}{e^{2k+2}}$	$\frac{1}{e^{2k+1}}$	$\frac{1}{e^{2k-2}}$	1	e
$F'(x)$	/	$-$	0	$+$	0	$+$

$$F'(e^{-2k-2}) = [\ln(e^{-2k-2})]^{2k} \cdot (\ln e^{-2k-2} + 2k + 1)$$

$$= \underbrace{(-2k-2)}_{(-)}^{\overset{2k}{\text{זוגי}}} \cdot \underbrace{(-2k-2+2k+1)}_{-1}$$

$$(+) \cdot (-) < 0$$

$$F'(e^{-2k+2}) = [\ln(e^{-2k+2})]^{2k} \cdot (\ln e^{-2k+2} + 2k + 1)$$

$$= \underbrace{(-2k+2)}_{(-)}^{\overset{2k}{\downarrow}\ \text{זוגי}} \cdot \underbrace{(-2k+2+2k+1)}_{3}$$

$$(+)\cdot(+)>0$$

$$F'(e)=\underbrace{[\ln e]^{2k}}_{+}\cdot\underbrace{(\ln e+2k+1)}_{+}$$

עולה: $\frac{1}{e^n}<x$ וגם $.x\neq 1$

יורדת: $0<x<\frac{1}{e^n}$

~~נקודות קיצון~~

עבור $n=1$:

$$F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^{1}=\frac{1}{e}$$

$$\min\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$$

לפי שרטוט בסעיף הקודם:

עבור n אי זוגי שונה מ-1:

$$F\left(\frac{1}{e^n}\right)=\frac{1}{e^n}\left(\ln e^{-n}\right)^n$$

לפי טבלה:

$$F\left(\frac{1}{e^n}\right)=\frac{1}{e^n}\cdot(-n)^n=-\left(\frac{n}{e}\right)^n\rightarrow\min\left(\frac{1}{e^n},-\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

עבור n זוגי:

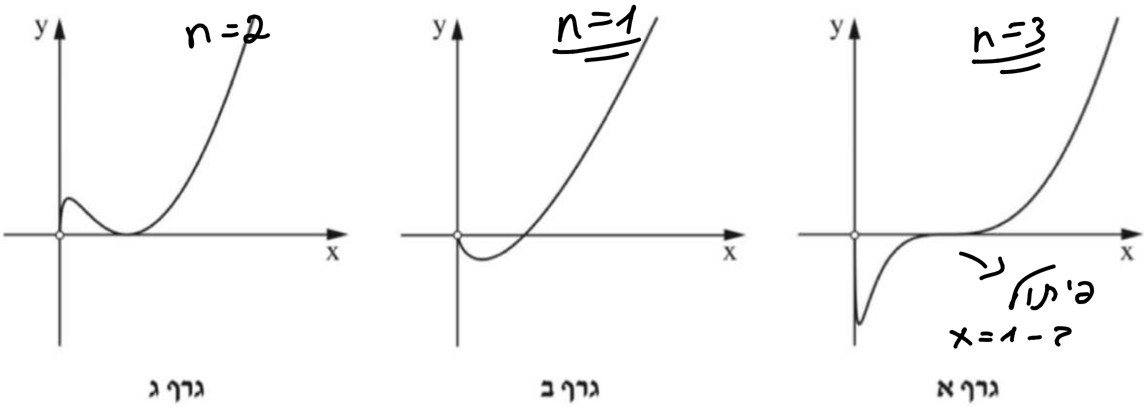
$$F\left(\frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{e^n} \cdot (-n)^n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\max\left(\frac{1}{e^n}, \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

$$F(1) = 1 \cdot (\ln 1)^n = 0$$

$$\min(1, 0)$$

ב)

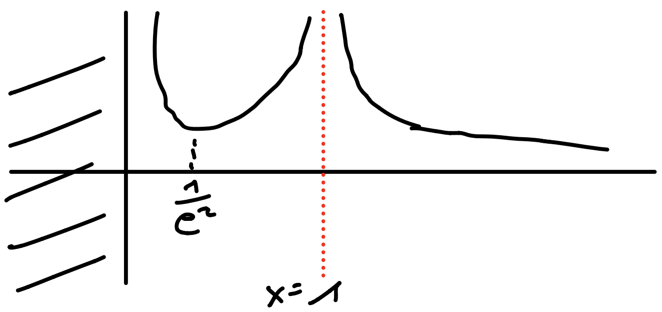


ג) נתונה הפונקציה:

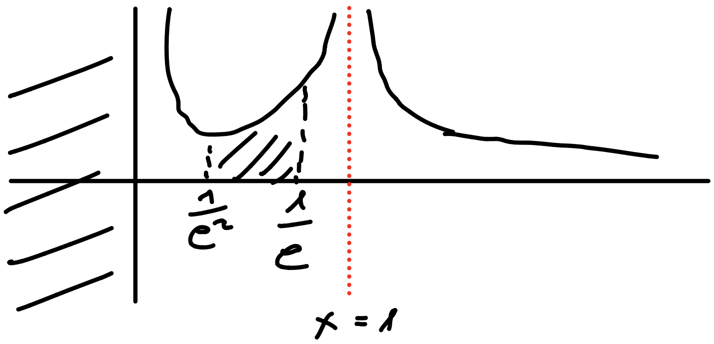
$$g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{F(x)} \rightarrow g'(x) = -\frac{F'(x)}{(F(x))^2} \rightarrow$$ עולה היכן ש F יורדת ולהיפך.

נתבונן בשרטוט לעיל עבור $n=2$.



$$\rightarrow \frac{1}{\infty} \rightarrow y=0$$ אס' אופקית:



(3

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} g(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$$

נסמן: $\ln x = t$

$\frac{1}{x}dx = dt$

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$\frac{-1}{\ln x}\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} = \left(\frac{-1}{\ln(\frac{1}{e})} - \frac{-1}{\ln(\frac{1}{e^2})}\right) = \frac{-1}{-1} + \frac{1}{-2}$$

$$= \frac{1}{2}$$