

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

מועד ב קיץ 2020, שאלון 581 (806)

נכתב ע"י צוות המרצים של HiGHQ

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiGHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

סיכומי שיעורים

לא צריך לסכם!
הכנו עבורכם סיכומי
שיעורים מראש



ספריית שיעורים

כל השיעורים
פתוחים לצפייה,
בכל זמן ומכל מקום



ריענון לפני הקורס

הגיעו מוכנים עם
חומרי הכנה ייחודיים



מרצה זמין ב- Whatsapp

לכל שאלה, מרגע הרישום
עד הבחינה



לחצו לפרטים נוספים מיועץ לימודים <<

1. סל האלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות סריאתלון.

התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים.

בפתרון השאלה, הנון שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, סל האלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.



נתון: סל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00.

סל הגיע לקו הסיום של הסריאתלון חצי שעה לפני אלון.

מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ"ש ממהירות הריצה של סל.

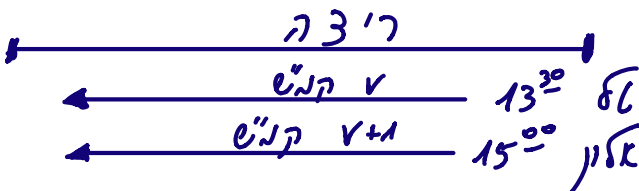
א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

ג. לפני שני היגדים I-II. קבע בטנגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.

I) מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.

II) מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.



זמן	מ"ש	מהירות	מרחק
42	$\frac{42}{v}$	v	מרחק
42	$\frac{42}{v+1}$	v+1	מרחק

(1c)

היית ואלון התחיל לרוץ 1.5 שעות אחרי אלון והגיע לקו הסיום חצי שעה לפני אלון. סך הכל היה בזמן 1 שעה פחות מאלון, כלומר:

$$\frac{42}{v+1} + 1 = \frac{42}{v} \quad | \cdot v(v+1) \rightarrow \cancel{42v} + v^2 + v = \cancel{42v} + 42$$

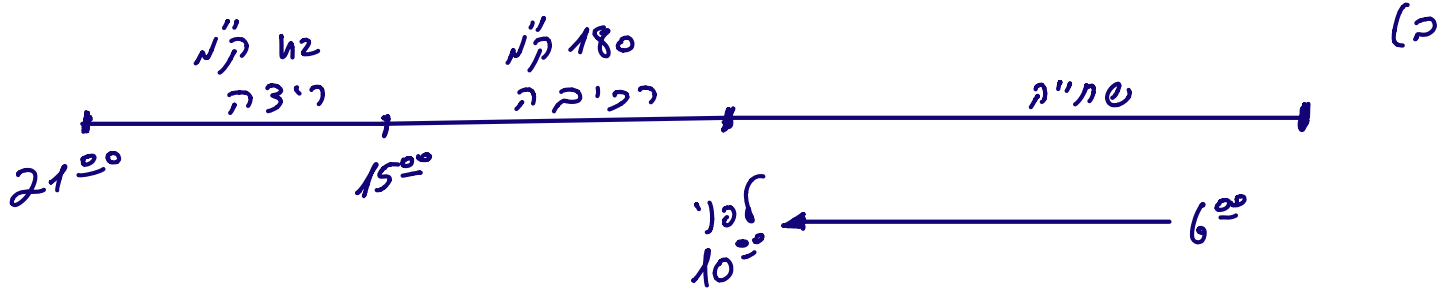
$$v^2 + v - 42 = 0 \rightarrow (v-6)(v+7)$$

(כפס, מהירות חיובית) $\rightarrow v = -7$ (פס), $v = 6$ קמ"ש

מהירותו של אלון הייתה 6 קמ"ש, כלומר פחות מהירותו של אלון $\frac{42}{6} = 7$

הוא 7 שעות. אלון הגיע לסיום המסלול ב- 20:30, ואילו אלון,

חצי שעה אחרי - 21:00



היציג I: מהירות רכיבת האופניים של אלון היא 18 קמ"ש.
 כבי אסיים את מסלול הרכיבה היה אליו ארכוב 10 שעות ($\frac{180}{18}$)
 כאומרי אהתחיל את מסלול הרכיבה ב-5°, גסתירה אנתון
 (התחיל ב-6° את מסלול השתייה)

כאומרי לזכר זה **באתי אנפשי**

היציג II: מהירות רכיבת האופניים של אלון הו 25 קמ"ש.
 כצית אל לנת אסיים את מסלול הרכיבה היה אליו ארכוב $7.2 = \frac{180}{25}$
 שעות, כאומרי אהתחיל את מסלול הרכיבה ב-7° (בהאימה סמ
 הנתון - סיימ לפני 10° את השתייה).

2. בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

א. מצא את a_1 האת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n > 1$.

(2) הראה כי a_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה $c_n = S_{n+1} - S_n$.

ב. (1) הראה כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית.

(2) הראה כי לכל k טבעי הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של

k האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(2) א) (1) בסדרה הסכומים החלקיים $S_1 = a_1$ עכ"ל:

$$S_1 = 2 \cdot 3^1 - 2 = a_1 \rightarrow a_1 = 4$$

כמו כן מתקיים עכ"ל סדרה:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$S_{n-1} = a_{n-1}$$

$$S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 2$$

ונקבל:

$$S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 2 - (2 \cdot 3^{n-1} - 2)$$

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^n \rightarrow a_n = \frac{4}{3} \cdot 3^n$$

$$\rightarrow a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_{n+1} = 4 \cdot 3^n, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4 \cdot 3^n}{4 \cdot 3^{n-1}} = 3 = q \quad (2) \text{ א}$$

↓
 התקבלה למה קבוצה
 הסדרה הנדסית, איקרה הראשון הוא 4 והנקה 3

התקבלה למה קבוצה הסדרה הנדסית, איקרה הראשון הוא 4 והנקה 3

בגרות משלימים או משפטים רק עם המומחים של HiHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

נסיון: $C_n = S_{n+1} - S_n$ ז"ל: C_n הנזכרים.
 (ב1)

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = C_n \quad \rightarrow \text{דפי סדר קוצים:}$$

הם כראית שזו סדרה הנזכרת
 $C_n = 4 \cdot 3^n$
 שלמה 3 ואיזרה הראשון הוא 12.

(ב2) ניתן לראות שסדרת C_n , היא כשט סדרת ה- a_n המתחילה מן
 האיבר השני.

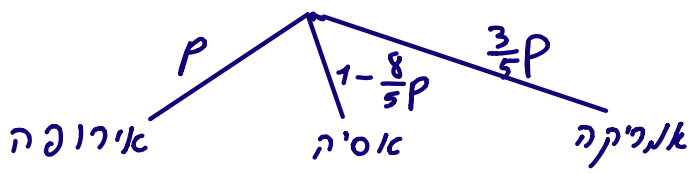
$$S_k^1 = \frac{4 \cdot (3^k - 1)}{2} \quad \text{סכום אן איברים ראשונים בסדרת}$$

$$S_k^2 = \frac{12(3^k - 1)}{2} \quad \text{סכום אן איברים ראשונים בסדרת } C_n:$$

$$\frac{S_k^2}{S_k^1} = \frac{12(3^k - 1)}{2} \cdot \frac{2}{4(3^k - 1)} = \frac{12}{4} = 3 \rightarrow \text{כנזוש}$$

3. יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים). נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה. בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב- P את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה. בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62.
- נתון: $P > 0.4$.
- א. מצא את P .
- ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. מהי ההסתברות שלפחות 2 נוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה? באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו. התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס אהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה. בחור באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), התברר ששניהם טסים לאותה היבשת. מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

(א)



(מיון: $P(אסיה, אמריקה) = 0.62$ אז $P > 0.4$.)

$$\left[\underbrace{P \cdot \left(1 - \frac{8}{5}P\right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{אירופה} \\ \text{ואסיה}}} + \underbrace{\frac{3}{5}P^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{אירופה} \\ \text{ואמריקה}}} + \underbrace{\left(1 - \frac{8}{5}P\right) \cdot \frac{3}{5}P}_{\substack{\downarrow \\ \text{אסיה} \\ \text{ואמריקה}}} \right]^2 = 0.62 \quad | :2$$

שני מצבים
דף מקור

$$P - \frac{8}{5}P^2 + \frac{3}{5}P^2 + \frac{3}{5}P - \frac{24}{25}P^2 = 0.31$$

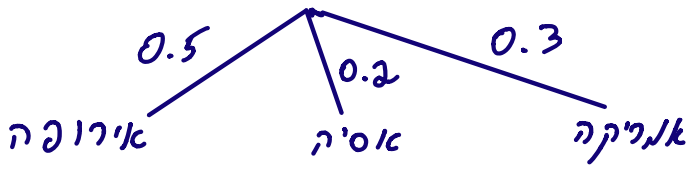
$$-\frac{40+15-24}{25}P^2 + \frac{25+15}{25}P - \frac{31}{100} = 0 \quad | \cdot (-100)$$

$$196P^2 - 160P + 31 = 0$$

$$P_{1,2} = \frac{160 \pm \sqrt{25600 - 24304}}{392} \rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{1}{2} \\ P_2 \sim 0.3163 \end{cases}$$

נשן ש: $P > 0.4$ ולכן $P = 0.5$

(ב)



צד השני: כפתיות 2 נוסעים אאלמריקה וזמ כפתות 2 אא נוסעים אאלמריקה (מתוק 5). כפיכך ייתכנו שני מצבים:

מצב א': 2 נוסעים אאלמריקה וזמ 3 אא נוסעים.

או

מצב ב': 3 נוסעים אאלמריקה וזמ 2 אא נוסעים.

נשתמש בנוסחת בינום ונקבל:

$$\binom{5}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^3 + \binom{5}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^2 = 0.3087 + 0.1323 = 0.441$$

(ג) נמשך את ההסתברות ששני אנשים טסים איתה היקשת, מתוק 50 אנשים, מספר הנוסעים אאלמריקה: $50 \cdot 0.3 = 15$

מספר הנוסעים אאסיה: $50 \cdot 0.2 = 10$

מספר הנוסעים אאירופה: $50 \cdot 0.5 = 25$

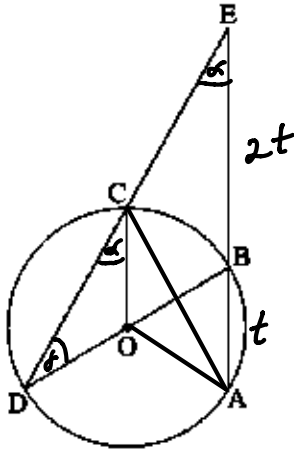
יצוץ שהשניים שנבחרו מאותה היקשת כאלה:

$$P(\text{אותה יקשת}) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} + \frac{25}{50} \cdot \frac{24}{49} = \frac{900}{2450} = \frac{18}{49}$$

$$P(\text{שנייה מאמריקה}) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{3}{35}$$

$$P(\text{שנייה מאותה יקשת} / \text{שנייה מאמריקה}) = \frac{\frac{3}{35}}{\frac{18}{49}} = \frac{7}{30} \approx 0.23$$

ואכני.



4. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.

הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמותאר כציר.

BD הוא קוטר במעגל.

הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור).

א. הוכח: $\angle AED = \angle CDO$.

ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון: $\frac{EB}{BA} = 2$.

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9.

מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו-ABO $(S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO})$.

(ימנה)

לענה

זוויות קטס במשולש (ז=ס=ט), סימון.
זוויות מתאליות שוות בין לקבליים ואפי 1.

(1) $\angle CDO = \angle DCO = \alpha$
(2) $\angle DCO = \angle AED = \alpha$

אפי 1, 2, כאלה המעבר. נ.ש.ל. א.

\Downarrow
(3) $\angle AED = \angle CDO$

אפי 3, זוויות היקפיות הנשליות א איתה הקטן.

(4) $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$

אפי 4, זוויות מתחלפות שוות בין לקבליים.

(5) $\angle CAB = \angle OCA = \alpha$

אפי 2 ו-5, כאלה מעבר.

\Downarrow
(6) $\angle OCA = \angle DCO = \alpha$

נ.ש.ל. ב.

(7) ס מוכח זווית OCA

אפי 6, תיבור זוויות, זוויות היקפיות הנשליות א איתה הקטן

(8) ק"ז OA

אפי 1, זווית היקפית שווה אלמנטית הזווית ההיקפית הנשלית א איתה הקטן.

(9) $\angle DBA = \angle OCA = 2\alpha$

Δ ABO שווים.

(10) $\angle BOA = 2\angle CDB = 2\alpha$

Δ ABO שווים 3. נ.ש.ל. ג.

\Downarrow
(11) $AO = AB = R$

אפי (נתון 1-11).

(12) $AO = AB = OB = R$

(13) $EB = 2R$

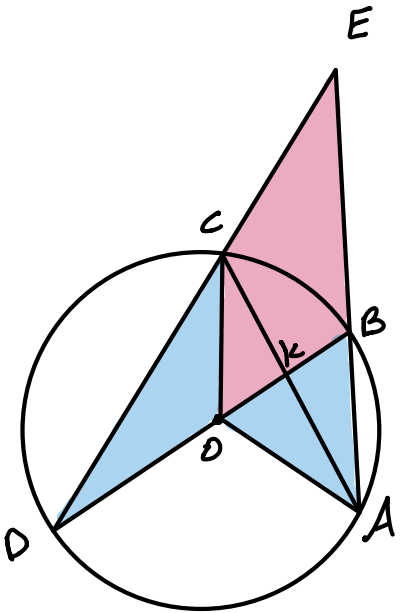
זוקה ננקודה ס אקאז AE.

(14) ק"ז h

שטח ארפז, (נתון).

(15) $S_{COBE} = \frac{h \cdot (BE + CO)}{2} = 9$

י'נהו ק	ז'ה
ז'פי 12.	$\neq 2\alpha = 60^\circ \rightarrow \neq \alpha = 30$ (16)
מתחלקת ושווה ז'פוייג ז'א < 0.	$\neq \angle CAB = \alpha = 30^\circ$ (17)
ז'פי 16, 17, ת'סיר ז'פוייג. ז'ק' א סי'מ'ן (ז'אז' שי'ט'א)	$\neq \angle OAC = 60 - 30 = 30$ (18)
ז'פי 17, 18.	\Downarrow ת'וז'ה ז'פוייג ז'א ק (19)
ת'וז'ה ז'פוייג ז'שו'ז' ABC ת'וא ז'מ ז'וק'ה.	\Downarrow $AK \perp OB$ (20)
א'מ מ'ת'כ'ז ה'מ'ז'ז' י'וז' א'ז'ק ז'ל'ת'ר, ת'וא ת'וז'ה א'ת ה'ת'ר	$CK = AK$ (21)
ז'ב'ה'ם ש'פוי'ם ז'שו'ז'.	$AK = h$ (22)
ז'פי 20, 14, ש'ט'ת מ'שו'ש.	$S_{\Delta OBA} = \frac{hR}{2}$ (23)
ז'א = h, ז'וק'ה ת'וז'פ'ני.	$S_{\Delta DCA} = \frac{hR}{2}$ (24)
ז'פי 15, 14, ז'א < 73 י'וס.	$S_{\Delta OBA} + S_{\Delta DCA} = hR$ (25)
ת'י'ש'וק.	$\frac{h \cdot (2R + R)}{2} = 9$ (26)
ת'י'ש'וק.	\Downarrow $3hR = 18 / : 3$
ז'פי 25, 26, כ'ל'ל מ'ז'ב'ר,	$hR = 6$
נ.ש.ש. ז'.	\Downarrow $S_{\Delta OBA} + S_{\Delta DCA} = 6$ (27)



5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) ששניים

מקדקודין, A ו-B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כפתואר בצמד. המעגל חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות E ו-K בהתאמה.

נסמן: $\angle KAC = \beta$, $\angle BAK = \alpha$.

א. הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל-r.

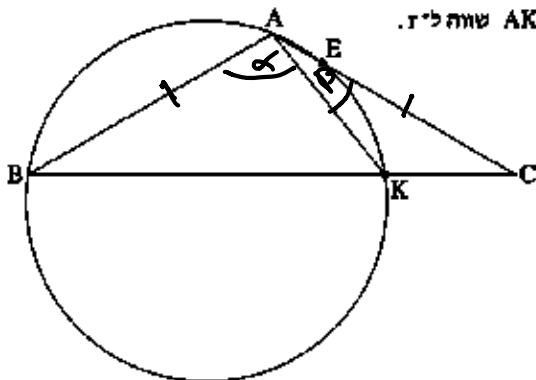
(2) הוכח: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}$

ידוע: $\beta < \angle ABK < 120^\circ$, ונתון: $\alpha + \beta = 120^\circ$.

ב. הראה כי α היא זווית קהה.

נתון: $BK = 55$, $AK = 28$.

ג. חשב את α ואת אורך הקטע BC.



(א) (סמן: $\delta = \angle CAB = \angle CBA$) (ניתן ABC שווה)

ואת רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC - r^* .

(1) $\frac{AK}{\sin \delta} = 2r$: ΔABC - הס' (נוס' ק) : ΔAKC

(2) $\frac{AK}{\sin \delta} = 2r^*$: ΔAKC - הס' (נוס' ק)

נ- (1) ו- (2) (נק' כ) $r = r^*$ כנדרש.

(1) $\frac{BK}{\sin \alpha} = 2r$: ΔABC - הס' (נוס' ק) : ΔAKC

(2) $\frac{KC}{\sin \beta} = 2r$: ΔAKC - הס' (נוס' ק)

נ- (1) ו- (2) (נק' כ) כנדרש:

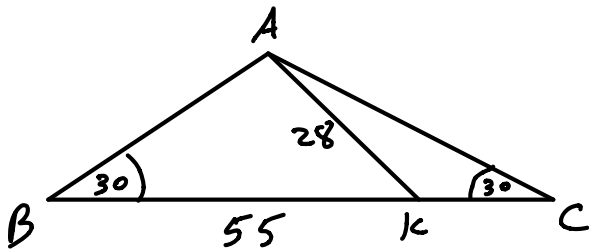
$\frac{BK}{\sin \alpha} = \frac{KC}{\sin \beta} \rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{KC}{BK} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}$

(ב) סכום זוויות ΔABC - $2\delta + \alpha + \beta = 180^\circ$

$2\delta + 120 = 180 \rightarrow \delta = 30 \rightarrow \beta < 30$ (סמן)

לכאן שאם $\alpha + \beta = 120$ ולכן $\beta < 30$ אז $\alpha > 90$, כלומר
 α זווית קהה.

ד) BC , זווית: α , $BA = 55$, $AC = 28$



נשתמש בסיוסוס - ΔBAK :

$$\frac{55}{\sin \alpha} = \frac{28}{\sin 30}$$



$$\sin \alpha = \frac{55}{56}$$



$$\alpha = 79.156^\circ$$



לכן זווית α קהה. $\alpha = 100.844^\circ$



$$\beta = 120 - 100.844 = 19.16^\circ$$

דפ' נשתמש בסיוסוס - ΔACK :

$$\frac{KC}{\sin 19.16} = \frac{28}{\sin 30}$$

$$KC = 18.376$$



$$BC = 55 + 18.376$$

$$BC = 73.376$$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = (x+3)^4(2-x)$ המוגדרת לכל x .

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות הזיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$.

- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
- (2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.
- (3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. (1) הראה כי $f(x) \geq 48$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.

(2) הסבר מדוע $\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$.

$$F(x) = 0 \rightarrow 0 = (x+3)^4(2-x)$$

\swarrow \searrow
 $x = -3$ $x = 2$
(-3, 0) (2, 0)

(1) חיתוך ציר ה- x :

$$F(0) = (0+3)^4(2-0) = 18$$

(0, 162)

חיתוך ציר ה- y :

$$F'(x) = 4(x+3)^3(2-x) - (x+3)^4$$

$$(x+3)^3 [8 - 4x - x - 3]$$

$$(x+3)^3 [5 - 5x] = 0$$

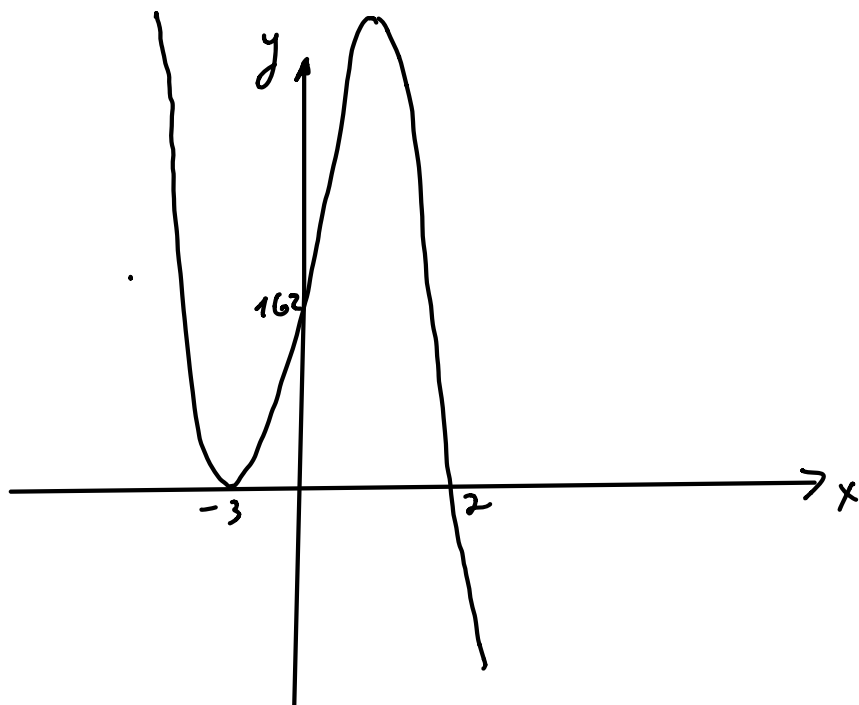
\swarrow \searrow
 $x = -3$ $x = 1$

(2) נקודות קיצון:

נקודות חשבון

x	-5	-3	0	1	2
$F'(x)$	$-$ \downarrow	0 min	$+$ \uparrow	0 max	$-$ \downarrow

$F'(-5) = (-) \cdot (+)$ $F(-3) = 0 \rightarrow$ min (-3, 0)
 $F'(0) = (+) \cdot (+)$ $F(1) = (1+3)^4(2-1) = 256 \rightarrow$ max (1, 256)
 $F'(2) = (+) \cdot (-)$



(3)

(2)

$$F(x) = (x+3)^n(2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{F(x-3)} = \frac{1}{x^n(5-x)}$$

(1) תחום הגזירה: $x \neq 0, 5$

(2) עפי תחום ההגזירה, אין חיתוך עם ציר y.
 כמו כן, היות ושבר שווה לאפס רק כאשר המונה הוא אפס,
 $g(x) \neq 0$, כלומר אין חיתוך עם ציר ה-x.

$$g'(x) = -\frac{F'(x-3)}{[F(x-3)]^2} \quad (3)$$

$$F'(x) = (x+3)^3 [5-5x] = 0 \rightarrow F'(x-3) = x^3(5-5(x-3)) = 0$$

$$g'(x) = \frac{-x^3(20-5x)}{(F(x-3))^2} \rightarrow x^3(20-5x) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=4 \end{matrix}$$

x	-1	0	2	4	4.5	5	6
F'(x)	+	-	-	0	+	-	+

$$F'(-1) = (+) \cdot (+), F'(2) = (-) \cdot (+), F'(4.5) = (-) \cdot (-), F'(6) = (-) \cdot (-)$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiHQ

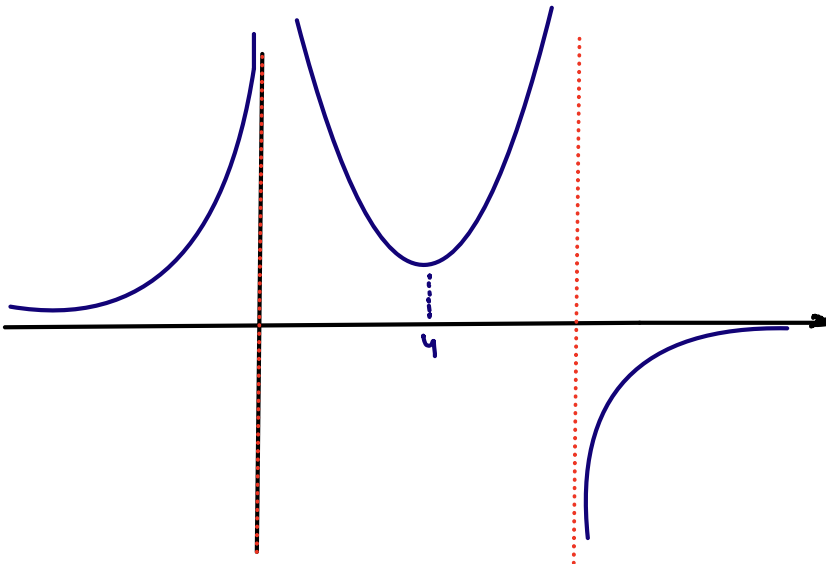
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

תחומי יציבה: $0 < x < 4$

תחומי עסייה: $x < 0$ או $4 < x < 5$ או $x > 5$

הערה: נטיים עם שהפונקציה היא הפונקציה ההופכית של הפונקציה $F(x)$ שלוש יחידות ימינה.

(4)



(2) צ"ע: $F(x) \geq 48$ עם $-1 \leq x \leq 1$

בין -1 ל- 1 , $F(x)$ עולה, כלומר $F(-1) \leq F(x)$ עם x_2 שבתחום. נקודת איתן עירב הפונקציה בנקודה $x = -1$:

$$F(-1) = (-1+3)^4(2+1) = 16 \cdot 3 = 48$$

מכאן שכל $F(x)$ בתחום בין -1 ל- 1 גדול או שווה ל- 48 .

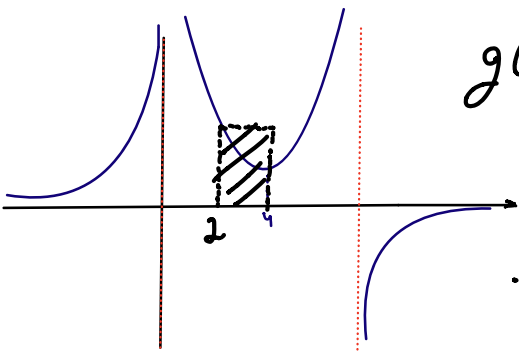
(2) צ"ע: $\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$

(תמונה במלבן שבשריטוט). $g(2) = \frac{1}{2^4 \cdot 3} = \frac{1}{48}$

שטח המלבן הוא אם כן: $(4-2) \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{24}$

ברור שהשטח הכוא בין הפונקציה $g(x)$ לבין ה-x קטן שווה לשטח המלבן, כלומר מתקיים:

$$\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$$



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות a , והבחן בין $a > 0$ ובין $a < 0$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) תראה שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
- (4) מצא את משוואת האיסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ הנטאונכות לצירים (אם יש כאלה).
- (5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$.

בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר a .

ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y = 1$ או משיק לו.

(1)

$a < 0$

$x \neq 0, x^2 - a \geq 0 \rightarrow \sqrt{\quad}$

$x \neq 0$ ← $x \neq 0$ וגם $x \neq 0$

$a > 0$

$x \neq 0$ (1) תחום הגדרה:

$x^2 - a \geq 0 \rightarrow \sqrt{\quad}$

$x \leq -\sqrt{a}, x \geq \sqrt{a}$

$x = 0$ — δ בתחום \rightarrow

$y = 0 \rightarrow x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = a$

$x = 0$ אם $a = 0$ אך בתווך זה

אין חיתוך

אם הצירים

(2) נקודות חיתוך עם הצירים:

$x = 0 \rightarrow$ בתחום δ

$y = 0 \rightarrow 0 = x^2 - a \rightarrow$

$(\sqrt{a}, 0), (-\sqrt{a}, 0)$

$F(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} \rightarrow F(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - a}}{(-x)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = F(x)$ (3) אזויות:

אנכיות:

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \frac{\sqrt{-a}}{0^\pm} = \pm \infty$

$x = 0$

אובקיט:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{\sqrt{x^4}}$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 - a}{x^4}} = 0 \rightarrow y = 0$

(4) אסימפטוטה:

אנכיות: אין, הפונקציה לא צריכה קרבויות:

אובקיט:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{\sqrt{x^4}}$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 - a}{x^4}} = 0 \rightarrow y = 0$

$a < 0$

$a > 0$

$F'(x) = \frac{\frac{2x \cdot x^2}{2\sqrt{x^2-a}} - 2x\sqrt{x^2-a}}{x^4} \rightarrow F'(x) = \frac{2x^3 - 4x(x^2-a)}{2x^4\sqrt{x^2-a}}$ (1) קטומי סכ"ה/יציבה:

$F'(x) = \frac{-x^3 + 2ax}{2x^4\sqrt{x^2-a}} = 0 \rightarrow x(-x^2 + 2a) = 0$

$x(-x^2 + 2a) = 0$
 $x = 0$ (סכ"ה קטומי!)
 $x^2 = 2a$ ($a < 0$)
 אין נק' קיצון!
 אין נק' קיצון!

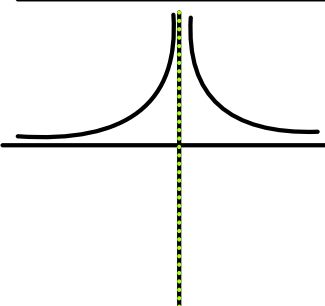
x	-1	0	+1
F'(x)	+	—	-

$F'(-1) = \frac{-((-)+(-))}{+} = +$

$F'(1) = \frac{+((-)+(-))}{+} = -$

סכ"ה: $x < 0$

יציבה: $x > 0$



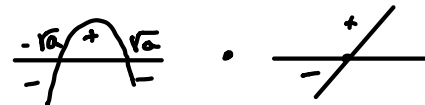
$x(-x^2 + 2a) = 0$
 $x = 0$ (סכ"ה קטומי!)
 $-x^2 + 2a = 0$
 $x^2 = 2a$
 $x = \pm\sqrt{2a}$
 (קטומי)

x	$x < -\sqrt{2a}$	$-\sqrt{2a}$	$-\sqrt{2a} < x < \sqrt{2a}$
F'(x)	+	0	-

x	$-\sqrt{2a} < x < \sqrt{2a}$	$\sqrt{2a} < x < \sqrt{2a}$
F'(x)	—	+

x	$\sqrt{2a}$	$x > \sqrt{2a}$
F'(x)	0	-

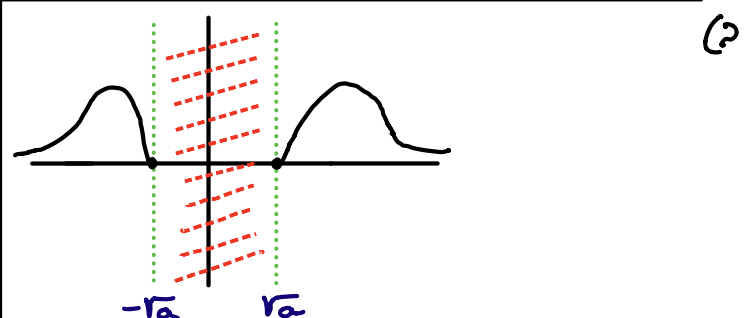
הסימנים נקבעו על פי שיטת הטורים
 נגזרת



$(-x^2 + 2a) \cdot x$

סכ"ה: $\sqrt{2a} < x < \sqrt{2a}, x < -\sqrt{2a}$

יציבה: $x > \sqrt{2a}, -\sqrt{2a} < x < -\sqrt{2a}$



$a < 0$

$F(x) \geq 1$

עבור כל ערך של a שלילי,
גודל הפונקציה חופק את הישר
 $y=1$

$a > 0$

(2) צ"ע: $F(x) \geq 1$

נדרוש: $F_{max} \geq 1 \rightarrow F(\sqrt{2a}) \geq 1$

$\frac{\sqrt{(\sqrt{2a})^2 - a}}{(\sqrt{2a})^2} \geq 1 \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{2a} \geq 1$

$\frac{\sqrt{a} - 2a}{2a} \geq 0$

הואיל והמכנה חיובי מספיק לדרוש:

$\sqrt{a} - 2a \geq 0$

למצא את נקודת הא'סוס:

$\sqrt{a} - 2a = 0$

$\sqrt{a} = 2a / ()^2$

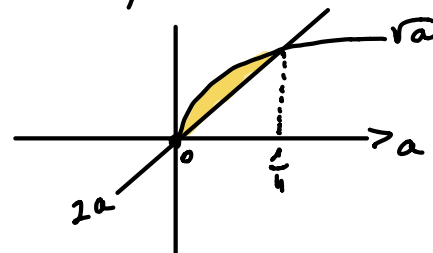
$a = 4a^2$

$4a^2 - a = 0$

$a(4a - 1) = 0$

↓ ↓
 $a=0$ $a=\frac{1}{4}$
↓
(כפי)

נתבונן קשרים שתי הפונקציות:



קא כראות שכני שיתקיים אי
השוויון: $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$

8. המשולש ABC חסום במעגל.

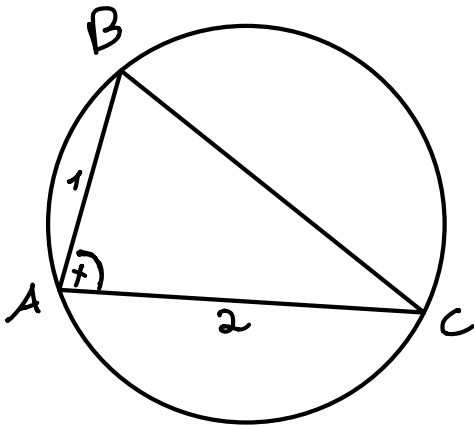
נתון: $AC = 2$, $AB = 1$

זווית $\angle BAC = x$.

א. הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל- $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$.

ב. מצא את הערך של x שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ג. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א(2).



א) לפי משפט הקוסינוסים ΔABC :

$$BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos x$$

$$BC^2 = 5 - 4\cos x \quad | \sqrt{\quad}$$

$$BC = \sqrt{5 - 4\cos x}$$

לפי משפט הסינוסים באותו משולש:

$$\frac{BC}{\sin x} = 2R \rightarrow \frac{\sqrt{5 - 4\cos x}}{\sin x} = 2R / 2$$

$$R = \frac{\sqrt{5 - 4\cos x}}{2\sin x} \quad \text{כנראה ש...}$$

2) נבנה פונקציית הטלה המביאה את גודל הרדיוס אלמינימום:

$$z(x) = \frac{\sqrt{5 - 4\cos x}}{2\sin x}$$

$$z'(x) = \frac{\frac{4\sin^2 x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} - 2\cos x \sqrt{5 - 4\cos x}}{4\sin^2 x}$$

$$z'(x) = \frac{4\sin^2 x - 10\cos x + 8\cos^2 x}{\sin^2 x \sqrt{5 - 4\cos x}}$$

$$u = \sqrt{5 - 4\cos x} \quad v = 2\sin x$$

$$u' = \frac{4\sin x}{2\sqrt{5 - 4\cos x}} \quad v' = 2\cos x$$

$$u' = \frac{2\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1/2 \quad \text{שם נשים בהנחה:}$$

$$2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2$$

$$4\sin^2 x = 4 - 4\cos^2 x$$

$$z'(x) = \frac{4 - 4\cos^2 x - 10\cos x + 8\cos^2 x}{\sin^2 x \sqrt{5 - 4\cos x}} = 0$$

$$z'(x) = \frac{4\cos^2 x - 10\cos x + 4}{\sin^2 x \sqrt{5 - 4\cos x}} = 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 2 \rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ נכנס} \\ t_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$x = \pm 60 + 360k$$

היות ו- $0 < x < 180$ תיתכנה רק שנייה אחת: $x = 60^\circ$

(קבוצה מינימלית: המטה הנזכרת חיובי, נבדוק רק את המומנט):

x	$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{2}$
$z'(x)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$

$$z'_{\text{מיני}}\left(\frac{x}{6}\right) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 < 0, \quad z'_{\text{מיני}}\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 4 > 0$$

אכן עבור $x = 60^\circ$ מתקבל אורך מינימלי של הרציוס.

(ב) עבור $x = 60^\circ$ אורך הרציוס הוא:

$$z\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{5 - 4\cos \frac{x}{3}}}{2 \sin\left(\frac{x}{3}\right)} = \frac{\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

לכאן שאורך הקוטר הממוקש הוא **2**

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה