

**פתרון בחינת הבגרות
במתמטיקה
מועד חורף מאוחר 2021,
שאלון 582 (807)
נכתב ע"י צוות המרצים של HiGHQ**

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiGHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

סיכומי שיעורים

לא צריך לסכם!
הכנו עבורכם סיכומי
שיעורים מראש



ספריית שיעורים

כל השיעורים
פתוחים לצפייה,
בכל זמן ומכל מכשיר



ריענון לפני הקורס

הגיעו מוכנים עם
חומרי הכנה ייחודיים



מרצה זמין ב- Whatsapp

לכל שאלה, מרגע הרישום
עד הבחינה



לחצו לפרטים נוספים מיועץ לימודים <<

1. נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2 = 4px$ ($p > 0$).

שיעור ה-y של נקודה K הוא 12.

המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את p (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב- p_1 ו- p_2 . $p_1 < p_2$.

ישר מן הצורה $y = mx$ ($m \neq 0$) חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, A,

ואת הפרבולה $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, B.

הצב את הערכים p_1 ו- p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה A, ואת שיעורי נקודה B באמצעות m.

בעבור כל ישר $y = mx$ ($m \neq 0$), נסמן ב-M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

א. מוקד הפרבולה: $\frac{4p}{4} = p \rightarrow (p, 0)$

נקודה K: $12^2 = 4px_K \rightarrow x_K = \frac{36}{p} \rightarrow K(\frac{36}{p}, 12)$

ליתקן מוקד-א:

$$(\frac{36}{p} - p)^2 + 144 = 20^2$$

$$\frac{1296}{p^2} - 72 + p^2 - 256 = 0 \quad | \cdot p^2 \quad \{ p \neq 0 \}$$

$$p^4 - 328p^2 + 1296 = 0$$

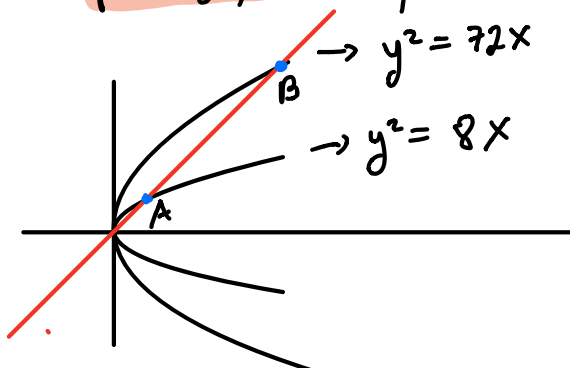
$$p_{1,2}^2 = \frac{328 \pm \sqrt{107584 - 5184}}{2}$$

$$\rightarrow p_1^2 = 324 \rightarrow p_1 = \pm 18$$

$$\rightarrow p_2^2 = 4 \rightarrow p_2 = \pm 2$$

דבי נתון, $p > 0$ כך שהתשובות האפשריות הן: $p = 2, 18$

(ב) נתון: $p_1 = 2, p_2 = 18$



$$(mx)^2 = 72x \rightarrow m^2x^2 - 72x = 0$$

$$x(m^2x - 72) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{72}{m^2}$$

$$x = 0$$

$$y_B = m x_B \rightarrow y_B = m \cdot \frac{72}{m^2} \rightarrow y_B = \frac{72}{m} \rightarrow B\left(\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m}\right)$$

ובאיפן צונה:

$$y_A = m x_A \rightarrow y_A = m \cdot \frac{8}{m^2} \rightarrow y_A = \frac{8}{m} \rightarrow A\left(\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m}\right)$$

(2) ופיין, m אלה AB , כאלה:

$$x_m = \frac{\frac{72}{m^2} + \frac{8}{m^2}}{2} \rightarrow x = \frac{40}{m^2}$$

$$y_m = \frac{\frac{72}{m} + \frac{8}{m}}{2} \rightarrow y = \frac{40}{m}$$

(כונן אית m ונקדל: $m = \frac{40}{y}$)

$$x = \frac{40}{\left(\frac{40}{y}\right)^2} \rightarrow x = \frac{40y^2}{1600} \rightarrow y^2 = 40x \quad (3) \text{ ק} - x$$

הלל המבוקש הוא פרבולה שבה $p=10$.

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

2. נתונה התיבה ABCDA'B'C'D'.

הנקודה K נמצאת על המקצוע CC'.

הנקודה E היא אמצע המקצוע A'D' (ראה סרטוט).

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$; $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$; $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$; $\overrightarrow{CK} = t \cdot \overrightarrow{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$; $|\underline{v}| = 6$; $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$

$\angle EKB = 90^\circ$.

א. מצא את t.

ב. נסמן ב- π את המישור CDA'B'.

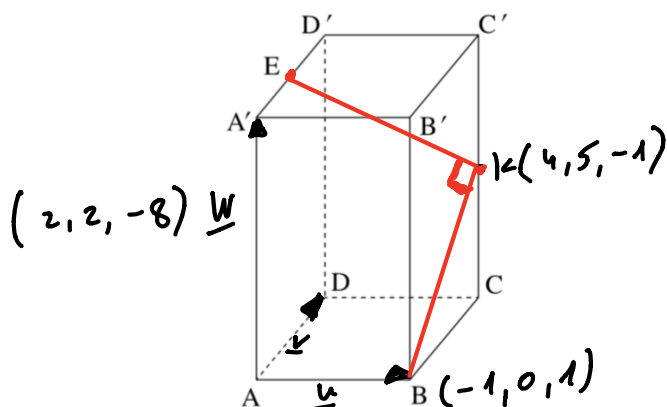
(1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $K(4, 5, -1)$; $B(-1, 0, 1)$

$\underline{w} = (2, 2, -8)$

ג. מצא את משוואת המישור π .



$$\overrightarrow{C'K} = t \overrightarrow{CC'} = t \overrightarrow{AA'} = t \underline{w} \rightarrow \overrightarrow{K'c} = (1-t) \underline{w}$$

$$\overrightarrow{B'c} = \underline{v} + t \underline{w}$$

$$\overrightarrow{E'D'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'D'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \underline{v}$$

$$\overrightarrow{D'c} = \overrightarrow{AB} = \underline{u}$$

$$\overrightarrow{E'c} = \frac{1}{2} \underline{v} + \underline{u} + (t-1) \underline{w}$$

כפי ניטן: $\overrightarrow{E'c} \cdot \overrightarrow{B'c} = 0$

$$\overrightarrow{E'c} \cdot \overrightarrow{B'c} = \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 + \underline{v} \cdot \underline{u} + (t-1) \underline{v} \cdot \underline{w} + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{w} + t \underline{w} \cdot \underline{u} + t(t-1) |\underline{w}|^2 = 0$$

כמו כן, בתיקה לתיק"ם: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ אכן:

$$\frac{1}{2} \cdot 6^2 + (t^2 - t) \cdot 72 = 0 \rightarrow 72t^2 - 72t + 18 = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow (2t-1)^2 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

ב) ע"ה שוקאר יהיה גאונק לאישר כליו אהיוק לאונק אשני וקאריוק בלתי קלו"ם בלישר.

$$\overrightarrow{cB'} = \underline{w} - \underline{v}, \quad \overrightarrow{D'c} = \underline{u}, \quad \overrightarrow{B'c} = \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{w}$$

לקבוצה ניצבות:

$$\overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{BA} = \underline{w} \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{w} \underline{w} - \underline{v} \underline{v} - \frac{1}{2} \underline{v} \underline{w} = 0 + 36 - 36 = 0$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} = \underline{u} \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{u} \underline{w} = 0 + 0 = 0$$

אכן מאונק כמישור ג.

(2) אם מאונק ד-אב שלמאונק כמישור ג, כלומר אב מקביל כמישור או מוכנס בו, היות ונק' א א'נה א המישור, אב מקביל כמישור.

(2) בסעיף הקודם הוכחנו אמצעה שוקאר \overrightarrow{AB} הוא הנורמל כמישור ג.

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-1), 5 - 0, -1 - 1)$$

כפי הניתונים הנוספים:

$$\overrightarrow{AB} = (5, 5, -2)$$

כלומר משוואת המישור כעת היא:

$$5x + 5y - 2z + D = 0$$

(מצא כעת נקודה א המישור.

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{BB'} \rightarrow (2, 2, -8) = (x_{B'} - (-1), y_{B'} - 0, z_{B'} - 1)$$

$$\rightarrow x_{B'} = 1, y_{B'} = 2, z_{B'} = -7 \rightarrow B'(1, 2, -7)$$

(3) במשוואת המישור ונקדא:

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-7) + D = 0$$

$$D = -29$$

$$\mu: 5x + 5y + 2z - 29 = 0$$

3. א. פתור את המשוואה: $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס.

הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס.

דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים - O. הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו-D.

במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות.

נתון כי הנקודות B, C, D הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה-n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

$$a = 1, b = -(1+i), c = 2i+2 \quad (1c)$$

$$z_{1,2} = \frac{1+i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 8i - 8}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1+i \pm \sqrt{1+2i-1-8i-8}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1+i \pm \sqrt{-8-6i}}{2}$$

$$(a+bi)^2 = -8-6i \quad \leftarrow w^2 = -8-6i \quad (נסו!)$$

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{array} \right. \rightarrow \left(\frac{-3}{b}\right)^2 - b^2 = -8$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{array} \right. \rightarrow a = \frac{-3}{b}$$

$$\frac{9}{b^2} - b^2 = -8 \quad / \cdot b^2$$

$$b^4 - 8b^2 - 9 = 0$$

$$(b^2 + 1)(b^2 - 9) = 0$$

$$\downarrow$$

$$b^2 = -1$$

$$\downarrow$$

$$b = \pm 3$$

$$\underline{\underline{b = 3}} \quad (בסוף:)$$

אין פתרון, כי לספר לאישי

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiHQ

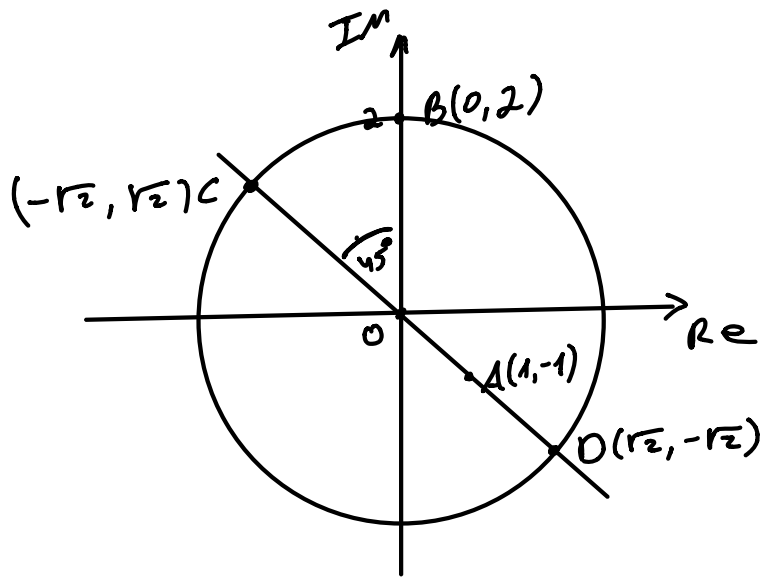
בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

$$2 \cdot a \cdot 3 = -6 \rightarrow a = -1$$

$$w = -1 + 3i$$

$$z_{1,2} = \frac{1+i \pm \sqrt{(-1+3i)^2}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1+i \pm (-1+3i)}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{4i}{2} = 2i \\ \frac{2-2i}{2} = 1-i \end{cases}$$



(ג) משוואת המעגל: $x^2 + y^2 = 4$

משוואת ישר ס: $y = -x$

נק' ע-1: $x^2 + (-x)^2 = 4$

$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$C(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), D(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

לספר הקדקודים המניאלי יתקבל כשיר (ק' ב היא קודקוד סמוך ע-א, נכדוק את גודל אכב א.

כ שם כק (גבור ע'הצנה ארגונולה)היות:

$C: -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, R=2, \theta = 135$

$C: 2 \text{cis} 135$

$\rightarrow \angle BOC = 45^\circ$

$B: 2 \text{cis} 90$

היות וסכום הזוויות המרכזיות (ראה שרטוט) הוא 360° , והגודל משוכלם, נקבל שספר הזכאות המניאלי הוא:

$n = \frac{360}{45} = 8$

ל(א) הזוויות קין כל פתרון היא 45° כפולמר:

$z_0 = 2 \text{cis} 90 \rightarrow 2i$
 $z_1 = 2 \text{cis} 135 \rightarrow -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
 $z_2 = 2 \text{cis} 180 \rightarrow -2$
 $z_3 = 2 \text{cis} 225 \rightarrow -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
 $z_4 = 2 \text{cis} 270 \rightarrow -2i$
 $z_5 = 2 \text{cis} 315 \rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
 $z_6 = 2 \text{cis} 360 \rightarrow 2$
 $z_7 = 2 \text{cis} 45 \rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

(2) משוואה שפתרונותיה הם הנקודות שלמזאנו גסעיל הקורב תהיה משוואה

למשלה שמינית.

$$z^8 = R \operatorname{cis} \theta \quad / \sqrt[8]{}$$

$$z_k = \sqrt[8]{R} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2\pi \cdot k}{8} \right)$$

$$\sqrt[8]{R} = 2 \rightarrow R = 2^8 \rightarrow \boxed{R = 256}$$

$$\theta = 0^\circ \leftarrow \frac{\theta}{8} = 0 \leftarrow \theta = 0$$

$$256 \operatorname{cis} 0 = 256 \cdot 1$$

$$z^8 = 256$$

אכן:

4. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x . הגרף שלה חותך את ציר ה- x בראשית הצירים בלבד.

נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1, 1)$ ו- $(-1, -1)$ בלבד.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x = 1$ ו- $x = -1$ בלבד.

ציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.

א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ (פונקציית הנגזרת של $g(x)$).

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.

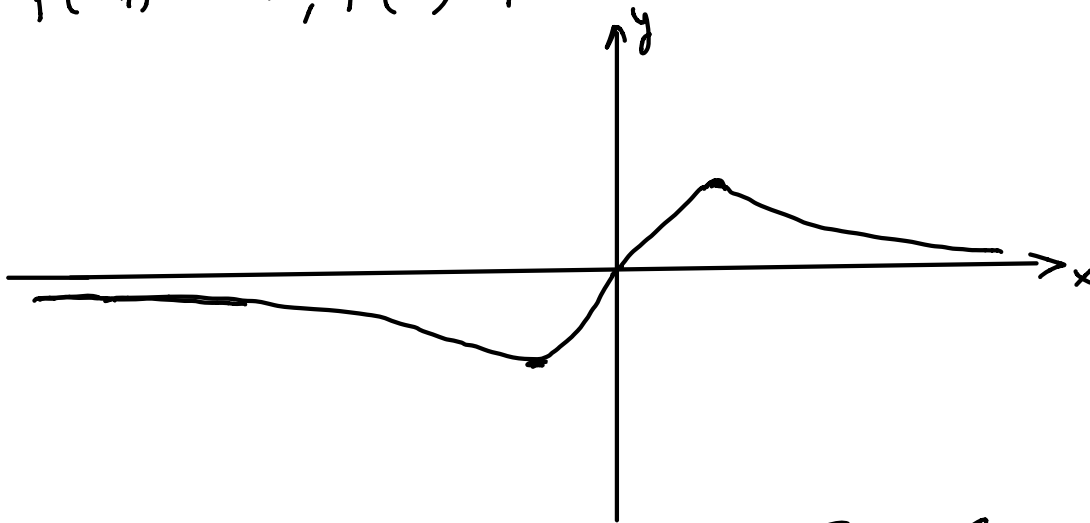
ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

$F'(-1) = 0, F'(1) = 0, (0,0), F(x)$ מוגזרת לכל x , $F(0) = 0$
 $F(-1) = -1, F(1) = 1$



תמונה החיוביות והשליליות של $f'(x)$ הם תקומה האלייה/יריבה.
 כפי הנתונים נקבל: חיוביות: $-1 < x < 1$
 שליליות: $x < -1$ או $x > 1$

(ג) מכיוון ש: $f(x)$ מוגזרת לכל x ,
 גם $e^{f(x)}$ מוגזרת לכל x , ולכן $f(x)$ היא חיבור של שתי פונקציות יציבות ולכן יציבה.

(2) אסימטוטה אנכית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)} - g(x) = e^0 - 0 = 1 \rightarrow y=1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{g(x)} - g(x) = e^0 - 0 = 1 \rightarrow y=1$$

(3) נק' קיצוני:

$$F'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) - g'(x) = 0$$

$$g'(x) [e^{g(x)} - 1] = 0$$

\downarrow
 $g'(x) = 0$
 \downarrow
 $x = \pm 1$

\downarrow
 $e^{g(x)} = 1$
 \downarrow
 $g(x) = 0$
 $x = 0$

$$F(0) = e^{g(0)} - g(0) = 1 - 0 \rightarrow$$

(0, 1)

$$F(1) = e^{g(1)} - g(1) = e^1 - 1 = e - 1 \rightarrow$$

(1, e-1)

$$F(-1) = e^{g(-1)} - g(-1) = e^{-1} + 1 = \frac{1}{e} + 1 \rightarrow$$

(-1, $\frac{1}{e} + 1$)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
F'(x)	+	0	-	0	+	0	-

[טפי סיגנל (g)]

$$F'(-2) = g'(-2) [e^{g(-2)} - 1] = (-) \cdot (-) = +$$

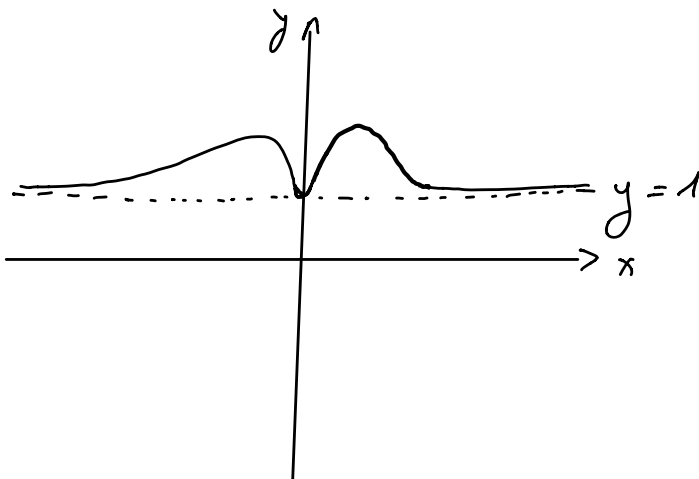
$$F'(-\frac{1}{2}) = g'(-\frac{1}{2}) [e^{g(-\frac{1}{2})} - 1] = (+) \cdot (-) = -$$

$$F'(\frac{1}{2}) = g'(\frac{1}{2}) [e^{g(\frac{1}{2})} - 1] = (+) \cdot (+) = +$$

$$F'(2) = g'(2) [e^{g(2)} - 1] = (-) \cdot (+) = -$$

$\min(0, 1), \max(-1, \frac{1}{e} + 1), \max(1, e - 1)$

קיבולני:



(4) סיגנל אפסיל:

5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f'(x)$ (נגזרת הפונקציה $f(x)$) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a > 0$.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$ וציר ה- x ,

והוכח כי השטח אינו תלוי ב- a .

$a > 0$

(5)

תחום הגדרה: $x > 0$ (א)

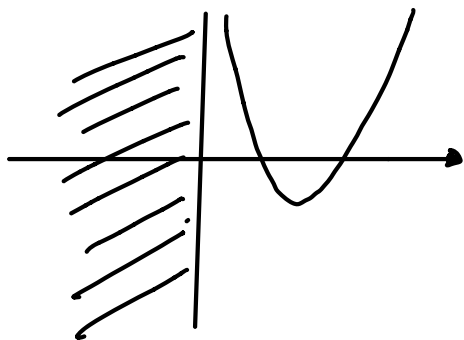
$$F'(x) = a - \frac{1}{x} \rightarrow a - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow ax = 1 \rightarrow x = \frac{1}{a} \quad (ב)$$

$$F\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a} - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = 1 + \ln(a^2)$$

נקודה חשוכה: $\min\left(\frac{1}{a}, 1 + \ln(a^2)\right)$

$$F''(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow F''\left(\frac{1}{a}\right) = a^2 > 0 \rightarrow \min$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0^+ - (-\infty) = \infty \quad (ג)$$



$a < 0$

תחום הגדרה: $x < 0$ (א)

$$F'(x) = a - \frac{1}{x} \rightarrow a - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow ax = 1 \rightarrow x = \frac{1}{a} \quad (ב)$$

$$F\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a} - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = 1 + \ln(a^2)$$

נקודה חשוכה: $\min\left(\frac{1}{a}, 1 + \ln(a^2)\right)$

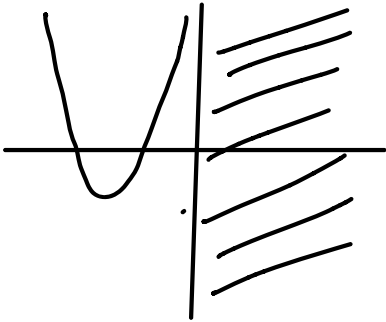
$$F''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow \min$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0^+ - (-\infty) = \infty$$

(2)



$$g(x) = F'(x), \quad a > 0 \quad (3)$$

$$\therefore \exists \delta, \quad g'(x > \frac{1}{a}) > 0, \quad \frac{2}{a} > \frac{1}{a}$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} g(x) dx = F(x) \Big|_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} = F\left(\frac{2}{a}\right) - F\left(\frac{1}{a}\right) = \left[2 - \ln\left(\frac{2}{a^2}\right)\right] - \left[1 + \ln(a^2)\right]$$

$$= 2 - \ln(2a^{-2}) - 1 - \ln(a^2) = 1 - (\ln 2 + \ln(a^{-2})) - 2 \ln a$$

$$= 1 - \ln 2 + 2 \ln a - 2 \ln a = 1 - \ln 2$$

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HiHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה

בגרות משלימים או משפרים רק עם המומחים של HIGHQ

בשיטה המהירה והמובילה להצלחה