פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

2021 מועד חורף, שאלון 582 (807)

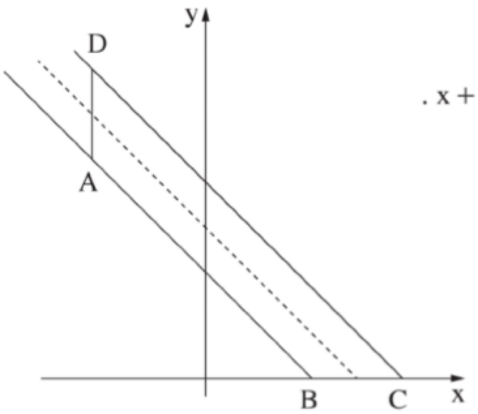
נכתב ע"י צוות המרצים של HiGHQ

.1 ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.

נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו־ DC, הוא $\sqrt{2}$,

קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על הישר $x + y - 4 = 0$.

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז נמצאים עליהם.



נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה־x.

מעבירים פרבולה קנונית $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

כך שהקודקודים A ו־ D של הטרפז נמצאים על מדריך הפרבולה,

ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. **(1)** מהי משוואת הפרבולה שבעבורה

הטרפז ABCD הוא הגדול מבין שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה הטרפז ABCD הוא הקטן מבין שני הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את שתי הפרבולות שמצאת בסעיף **ב** בשתי נקודות, E ו־ F.

מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

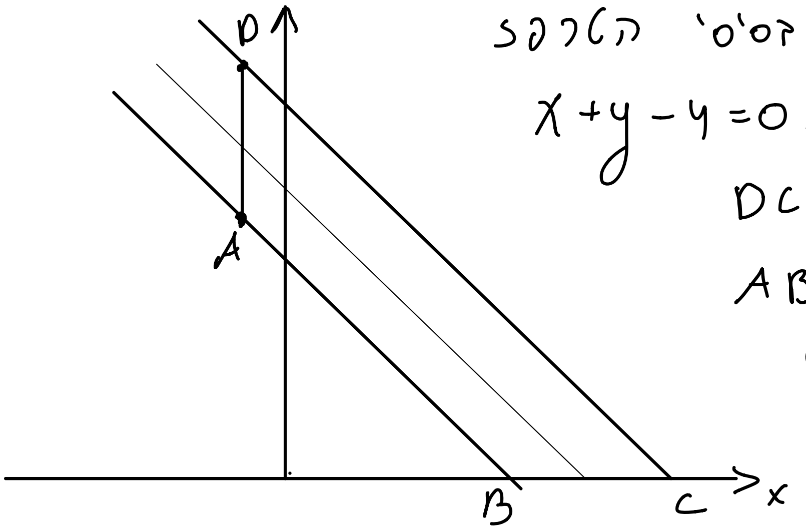
1) א) ABCD טרפז. המרחק בין בסיסי הטרפז הוא $\sqrt{2}$. קטע האמצעים: $x+y-4=0$

כלומר: $DC: x+y+D_1=0$

$AB: x+y+D_2=0$

מרחק בין הישרים המקבילים, כפול ממרחקם מקטע האמצעים

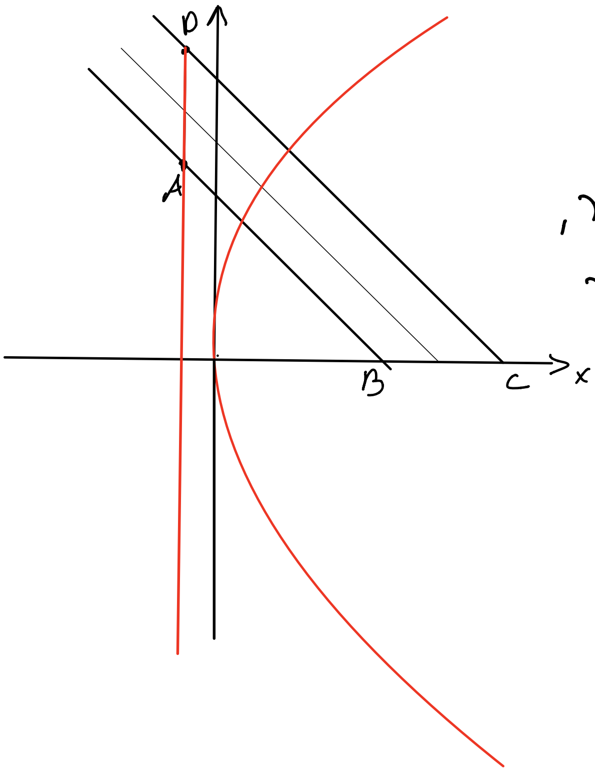
לכן: $\frac{|D+4|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ← $|D+4|=1$



$D=-3$ $\quad$ $D=-5$

חיתוך ציר ה-y של הישר BC הוא D_1 - ושל הישר AB: D_2 -

מכאן ברור ש: $DC: x+y-5=0$, $AB = x+y-3=0$



ב(1) נקודה B: $x=3 \leftarrow (3,0)$

נקודה C: $x=5 \leftarrow (5,0)$

ככל שמוקד הפרבולה $(\frac{p}{2},0)$ גדול יותר,

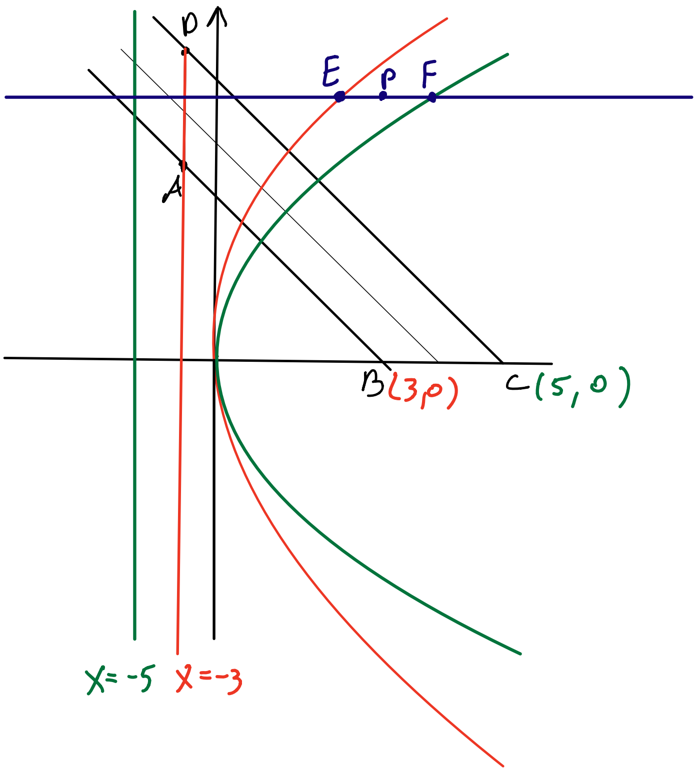
כך המדריך $(x=-\frac{p}{2})$ רחוק יותר מציר

ה-x, וכך יגדלו גם הבסיסים,

כלומר, הפרבולה הגדולה יותר מתקבלת

עבור $\frac{p}{2}=5 \leftarrow y^2=20x$

2) $\frac{p}{2}=3 \leftarrow y^2=12x$



ג) $p(t,s) \rightarrow x_E + x_F = 2t$

$\rightarrow y_E = s$

$s^2 = y_E^2 = 12x_E \quad | \quad x_E = 2t - x_F$

$s^2 = y_F^2 = 20x_F$

$$\begin{cases} s^2 = 12(2t - x_F) \\ s^2 = 20x_F \end{cases}$$

$2\frac{2}{3}s^2 = 40t \;/:2\frac{2}{3}$

$s^2 = 15t$

$y^2 = 15x$

המ"ג הוא פרבולה!

$$\begin{cases} s^2 = 24t - 12x_F & /\cdot 1\frac{2}{3} \\ s^2 = 20x_F \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 1\frac{2}{3}s^2 = 40t - 20x_F \\ s^2 = 20x_F \end{cases}$$

2. ABC הוא משולש.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

נתון: $A(0,2,-1)$, $B(-3,2,2)$,

הנקודה $D(-2,3,1)$ נמצאת על הקטע BC כך ש־ $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.

א. **(1)** מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC .

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש־ ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה.

S היא נקודה כך ש־ MS מאונך למישור ABEC .

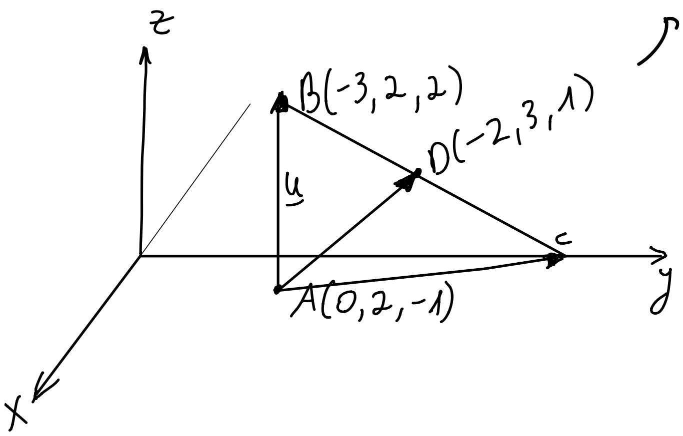
ב. **(1)** מצא הצגה פרמטרית לישר MS , והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת־סעיף **ב(1)**.

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB .

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P , כך ש־ PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה מתקיים $\sphericalangle SAB = \sphericalangle PAB$?

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.



א(1) נתון ש: $\vec{AD}$ הוא קומבינציה ליניארית

של $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ ← $\vec{AD} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$

כך ש: $\alpha + \beta = 1$.

כלומר D נמצאת על BC .

מכאן ש:

$\vec{AD}=(-2,1,2)=\frac{2}{3}(-3,0,3)+\frac{1}{3}(x_c,y_c-2,z_c+1)$

$-2=-2+\frac{1}{3}x_c \rightarrow x_c=0, \quad 1=\frac{1}{3}y_c-\frac{2}{3} \rightarrow 1\frac{2}{3}=\frac{1}{3}y_c$

$y_c=5, \quad 2=2+\frac{1}{3}z_c+\frac{1}{3} \rightarrow z_c=-1$

נקודה c היא אם כן: $C(0,5,-1)$

$\vec{AC}\cdot\vec{AB}=(0,3,0)(-3,0,3)=0 \rightarrow AC\perp AB$

א2) נסמן את וקטור הנורמל: $\vec{N}(a,b,c)$

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-3,0,3)=0\\(a,b,c)\cdot(0,3,0)=0\end{cases}$$

$-3a+3c=0 \rightarrow a=c$

$3b=0 \rightarrow b=0$

נבחר: $a=c=1$ ונקבל:

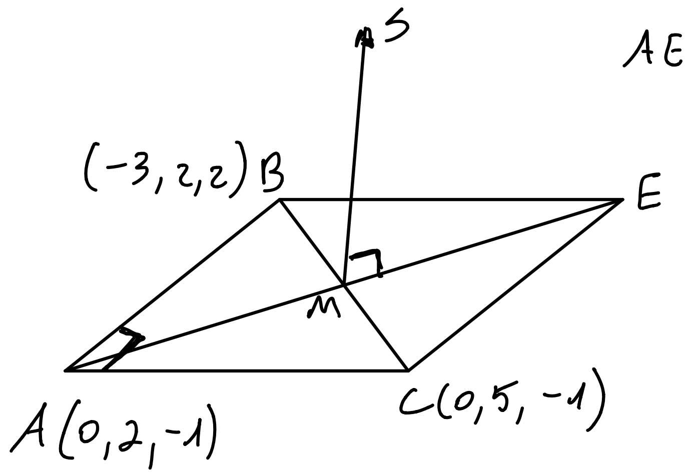
$x+z+D=0$

נציב את הנקודה A ונקבל:

$0-1+D=0 \rightarrow D=1$

כלומר, משוואת מישור ABC:

$x+z+1=0$



ב1) נקודה M היא אמצע BC ו- AE

$$M=\left(\frac{-3+0}{2},\ \frac{2+5}{2},\ \frac{2-1}{2}\right)$$

$$M=\left(-1\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\right)$$

נמצא את וקטור $\overrightarrow{MA}$:

$$\overrightarrow{MA}=\left(1\tfrac{1}{2},\ -1\tfrac{1}{2},\ -1\tfrac{1}{2}\right)$$

וקטור הנורמל הוא, לפי משוואת המישור: $(1,0,1)$

ומכאן שמשוואת הישר MS: $l_{MS}: \underline{x}=\left(-1\tfrac{1}{2},3\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)+t(1,0,1)$

<u>הסבר</u>:

מכיוון שמרכז מעגל החוסם מלבן הוא נקודת מפגש האלכסונים של המלבן, הגובה היורד מ- S לבסיס (ABEC) חותך אותו בנקודה M.

(הגובה לבסיס הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס)

מכיוון שהאלכסונים במלבן שווים וחוצים מתקיים $BM=MC=AM=ME$

נסמן את חצאי האלכסונים ב- p ונקבל לפי פיתגורס:

$p^2+MS^2=BS^2$, $p^2+MS^2=SE^2$ ....

כלומר כל מקצועות הצד שווים זה לזה ללא תלות ב- S.

2) נבחר $t=\frac{1}{2}$ ונקבל שנקודה S היא: $S\left(-1,3\tfrac{1}{2},1\right)$

כלומר: $\overrightarrow{AS}=\left(-1,1\tfrac{1}{2},2\right)$ $\quad\overrightarrow{AB}=(-3,0,3)$

$$\cos\angle SAB=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AS}|}\longrightarrow \cos\angle SAB=\frac{9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{7\frac{1}{4}}}$$

$\angle SAB\sim 38.016^0$

3) כדי ש: PABEC תהיה פירמידה ישרה על נקודה P להיות על הישר SM. על מנת שיתקיים $\measuredangle SAB=\measuredangle PAB$, עלינו למצוא נקודה P כך ש: $SM=PM$, כלומר שנקודה M היא אמצע קטע SP. נגדיר נקודה כללית על SM: $P(t-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2})$

ונדרוש:

$$\frac{X_P+X_S}{2}=X_M \longrightarrow \frac{t-1\frac{1}{2}-1}{2}=-1\frac{1}{2} \longrightarrow t-2\frac{1}{2}=-3$$

$$t=-\frac{1}{2}$$

כלומר נקודה $P(-2,3\frac{1}{2},0)$

3. נתונה המשוואה $i\cdot z^6=\frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w .

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

נתון: $w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו לאחר ההכפלה ב־ w .

א)

$$i\cdot z^6=\frac{1}{64} \longrightarrow z^6=\frac{1}{64i} \longrightarrow z^6=\frac{-64i}{64^2}$$

$$z^6=-\frac{1}{64}i$$

נעביר להצגה קוטבית: $R=\frac{1}{64}$ $\theta=270^\circ$.

$z^6 = \frac{1}{64} cis270 \quad / \sqrt[6]{\quad}$

$z_0 = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}\, cis\left(\frac{270+360\cdot 0}{6}\right) = \frac{1}{2} cis45 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}i$

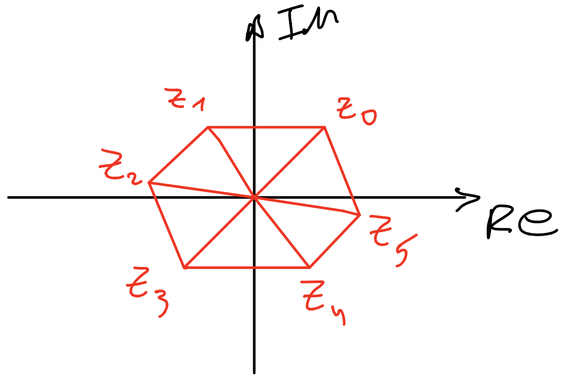
$z_1 = \frac{1}{2} cis\left(\frac{270+360}{6}\right) = \frac{1}{2} cis105 = -0.1294 + 0.483i$

$z_2 = \frac{1}{2} cis165 = -0.483 + 0.1294i$

$z_3 = \frac{1}{2} cis225 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i$

$z_4 = \frac{1}{2} cis285 = 0.1294 - 0.483i$

$z_5 = \frac{1}{2} cis345 = 0.483 - 0.1294i$



ב) $Arg(z_3) = Arg(z_0 + 180°)$

$Arg(z_4) = Arg(z_1 + 180°)$

$Arg(z_5) = Arg(z_2 + 180°)$

מכאן ש: $z_0 z_3$, $z_1 z_4$, $z_2 z_5$ הם ישרים העוברים בראשית

ג) $w \cdot z_0 + w \cdot z_1 + \ldots + w \cdot z_5 = w(z_0 + z_1 + \ldots z_5)$

מן הסעיף הקודם ראינו ש: $z_0 = -z_3$, $z_1 = -z_4$, $z_2 = -z_5$

כלומר הסכום: $w(-z_3 - z_4 - z_5 + z_3 + z_4 + z_5) = 0$

3) נתון: $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$R_w = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

$Arg(w) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

$\rightarrow w = cis30$

המשוואה המבוקשת היא מן הצורה: $z^{12}=R\,cis\theta$
לאחר ההכפלה ב-12 נקבל מספרים מרוכבים חדשים
בעלי רדיוס זהה לזה שהתקבל בסעיף א'. כדי שאכן
כל הפתרונות יהיו שווים חייב להתקיים: $R=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{1}{4096}$

הזוויות כעת תהיינה: $15°, 345°, \ldots 105°, 75°, 45°$.

כדי שהזווית הראשונה תהיה $15°$, θ חייבת להיות $180°$ $(15\cdot 12)$

לכן המשוואה המבוקשת היא: $z^{12}=\frac{1}{4096}cis180°=-\frac{1}{4096}$

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{-4}{e^{2x}-4e^{x}+3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע לכל $b<0$ מתקיים: $\int_{b-3}^{b} f(x)dx<-4$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. k הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.

ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k? נמק.

א(1) <u>תחום הגדרה</u>:

$F(x)=\dfrac{-4}{e^{2x}-4e^{x}+3}$

נסמן: $e^x=t \leftarrow (t-1)(t-3)\neq 0 \rightarrow t^2-4t+3\neq 0$

$t_1=e^x\neq 1 \rightarrow x\neq 0,\quad t_2=e^x\neq 3 \rightarrow x\neq \ln 3$

(2

$$\lim_{x \to \ln 3^{\pm}} F(x) = \frac{-4}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} F(x) = \frac{-4}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ קיימות שתי אסימפטוטות אנכיות: $x=\ln 3$, $x=0$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \frac{-4}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{-4}{0-0+3}$$

$\Rightarrow$ קיימות שתי אסימפטוטות אופקיות: $y=0$, $y=-\frac{4}{3}$

(3

$$F'(x) = \frac{4(2e^{2x}-4e^{x})}{(e^{2x}-4e^{x}+3)^2} = \frac{8e^{x}(e^{x}-2)}{(e^{2x}-4e^{x}+3)^2} = 0$$

$e^x = 0$, $e^x - 2 = 0$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

אין פתרון ϕ $\quad$ $x = \ln 2 \rightarrow$ נק' חשודה!

כיוון שהמכנה ו- e^x חיוביים, נבדוק רק בגורם $e^x - 2$.

נבדוק את השתנות הנגזרת מצידי הנקודה החשודה ובין האסימפטוטות:

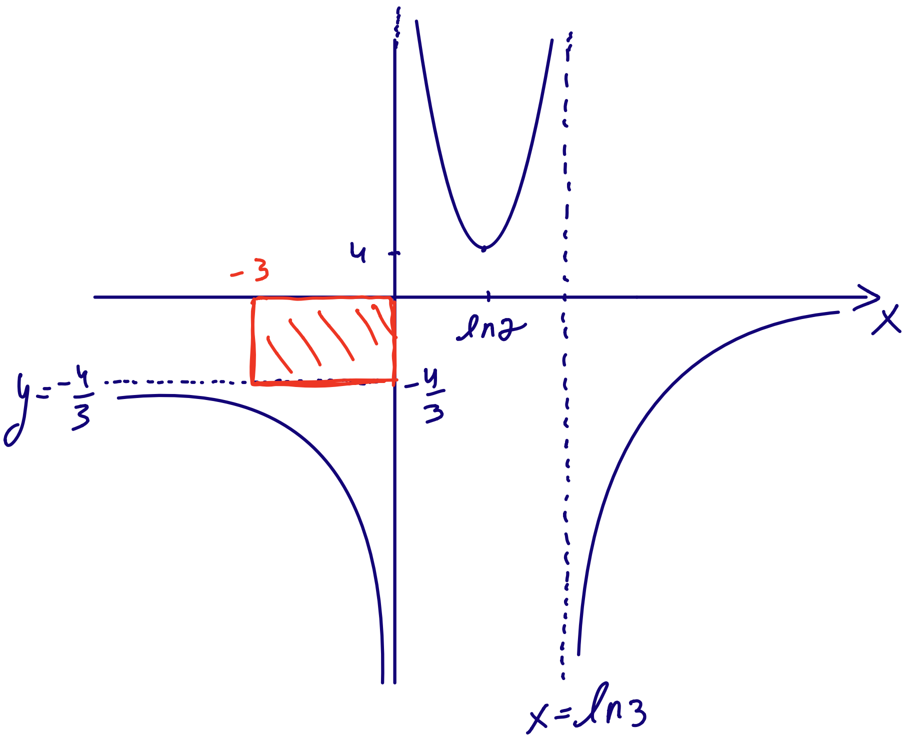
x	-1	0	$\ln 1.5$	$\ln 2$	$\ln 2.5$	$\ln 3$	$\ln 4$
$F'(x)$	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$
$F(x)$	$\searrow$	/	$\searrow$	4	$\nearrow$	/	$\nearrow$

$$F(\ln 2) = \frac{-4}{4-8+3} = 4$$

נקודת הקיצון היא: $\min(\ln 2, 4)$

4) תחומי עלייה: $x>\ln 2$ וגם $x\neq \ln 3$, תחומי ירידה: $x<\ln 2$ וגם $x\neq 0$.

5)



ב) צ"ל: עבור $b<0$ מתקיים:

$$\int_{b-3}^{b} f(x)\,dx < -4$$

מהשרטוט ניתן לקבוע כי עבור תחום ערכי x שליליים האינטגרל שלילי.

נתבונן במלבן האדום בשרטוט: נניח שאורכו 3 ורוחבו $\frac{4}{3}$. שטח מלבן זה הוא 4. ברור שהשטח (בתחום זה) הכלוא בין ציר ה-x לעקומה, גדול יותר משטח המלבן, ועובדה זו נכונה לכל מלבן שאורכו 3 ושאורכי צלעותיו הם ציר ה-x והאסימפטוטה. סך הכל קיבלנו:

$$\int_{b-3}^{b} |f(x)|\,dx > 4 \longrightarrow \int_{b-3}^{b} f(x)\,dx < -4$$

כמבוקש.

ג) $g(x)=\frac{k}{F(x)}$ נתון כי נקודת הקיצון של $g(x)$ היא נק' מינימום.

נגזור ונשווה לאפס: $g'(x)=\frac{-kF'(x)}{[F(x)]^2}=0$

$F'(x)=0 \to \ln 2$, $g(\ln 2)=\frac{k}{F(\ln 2)}=\frac{k}{4}$

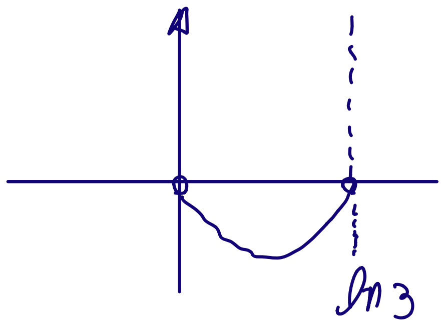
$\min\left(\ln 2, \frac{k}{4}\right)$

כמו כן, ניתן לראות ש-$g(x)$ אינה חותכת את ציר ה-x

נבדוק האם קיימות אסימפטוטות בנקודות אי ההגדרה:

$$\lim_{x\to \ln 3^{\pm}} = \frac{k}{\pm\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} = \frac{k}{\pm\infty}=0$$



כלומר השרטוט בתחום הרלוונטי הוא בהכרח:

לכן שיעורי ה-y של הקיצון שליליים $\frac{k}{4}<0 \Rightarrow k<0$

דרך נוספת: לדרוש $0<g''(x)$ (נתון נקודת מינימום) ולמצוא את האילוץ של k.

.5 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(\ell n(x))^3-1}+1$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הישר $y=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר). מצא את k . נמק.

ג. נגדיר $T(x)=\int_{e^{-1}}^{x} f(x)\,dx$ $\quad e^{-1}\le x<e$.

(1) לפניך שלושה ערכי x , (I-III). בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$ הוא הכי גדול? נמק.

I) $x=\frac{1}{2}$ $\quad$ II) $x=1$ $\quad$ III) $x=2$

(2) הסבר מדוע בעבור כל $e^{-1}\le x<e$ מתקיים: $T(x)<1$.

$$F(x)=\frac{1}{[\ln(x)]^3-1}+1$$

1) א

$$[\ln(x)]^3-1\ne 0 \rightarrow [\ln(x)]^3\ne 1$$

$$\ln(x)\ne 1 \rightarrow x\ne e$$

עבור הארגומנט ה - ln נדרוש:

$$x>0$$

2)

$$\lim_{x\to e^{\pm}} F(x)=\frac{1}{0^{\pm}}+1=\infty \rightarrow$$

קיימת אסימפטוטה אנכית ב- $x=e$

$$\lim_{x\to 0^{+}} F(x)=\frac{1}{-\infty-1}+1=1 \rightarrow$$

קיימת נקודת "חור" $(0,1)$ ב- $x=0$

$$\lim_{x\to \infty} F(x)=\frac{1}{\infty-1}+1=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} F(x)=\frac{1}{-\infty-1}+1=1$$

$\Rightarrow$ קיימת אסימפטוטה אופקית $y=1$

3) תחומי עלייה וירידה

$$F'(x) = \frac{\frac{-3\ln^2 x}{x}}{\left[[\ln(x)]^3-1\right]^2} = \frac{-3\ln^2 x}{x\left[[\ln(x)]^3-1\right]^2} < 0$$

הסבר: $x>0$ לפי תחום הגדרה, הביטוי בסוגריים במכנה מועלה בריבוע ולכן חיובי $\ln^2 x > 0$ ולכן -3 הוא הקובע את סימן הנגזרת.

עלייה: אין

ירידה: $x>0$ וגם $x \neq e$ וגם $x \neq 1$ (עבורו הנגזרת מתאפסת).

4) נקודות חיתוך עם הצירים:

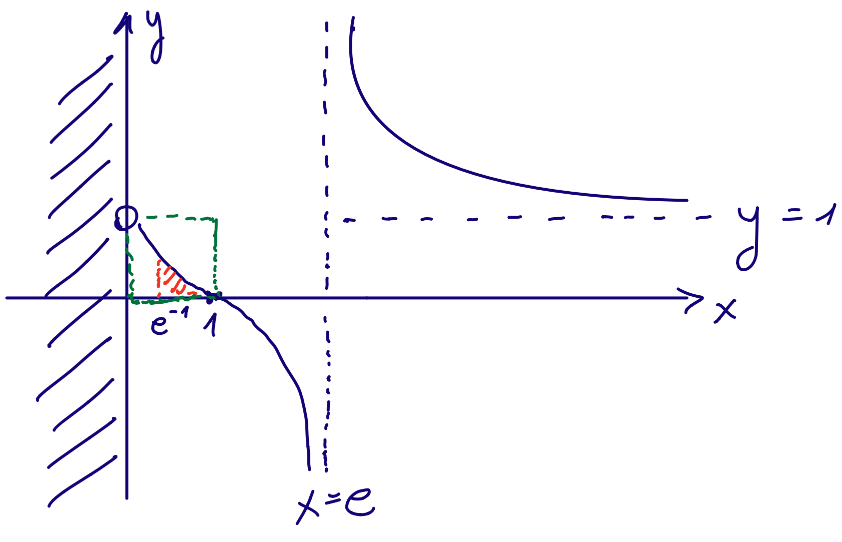
$F(x)=0$

$$\frac{1}{[\ln(x)]^3-1}+1=0 \rightarrow \cancel{1}+\ln^3(x)\cancel{-1}=0 \rightarrow \ln(x)=0$$

$x=1 \rightarrow (1,0)$

חיתוך ציר y, לא קיים בגין תחום הגדרה.

(5



ב) הישר $y=a$ אינו חותך את גרף הפונקציה ולכן $a = 1$

(ערך ה-y של נקודת ה"חור" וערך האסימפטוטה האופקית).

ג) $T(x)=\int_{e^{-1}}^{x} F(t)\,dt \quad , \quad e^{-1}\le x<e$

1) צריך לבחור את ערך ה-x, עבורו T גדולה ביותר.

$\frac{1}{e}\sim 0.37$, כלומר אנו רוצים את השטח המקסימלי [האדום בשרטוט]

שטח זה מתקבל כאשר $x=1$. אם $x>1$, ערך האינטגרל קטן (תוספת שלילית).

2) מן הנתונים ברור ש: $\int_{e^{-1}}^{1} F(x)\,dx < 1$ (שטח החסום ברביע הירוק בשרטוט ששטחו 1) כל הגדלה של הגבול העליון רק ~~תקטין~~ את ערך האינטגרל, כלומר:

לכל ערך של $e^{-1}\le x<e$ מתקיים: $\int_{e^{-1}}^{x} F(t)\,dt<1$

כמבוקש.