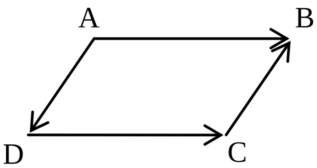
שיוויון בין וקטורים – פתרונות

1. במקבילית כל שני זוגות של צלעות נגדיות הינן מקבילות ושוות. נבדוק עבור כל זוג האם הוקטורים המסומנים בו הם באותו הכיוון או בכיוונים מנוגדים (אין אפשרות אחרת כיוון שהם מקבילים):

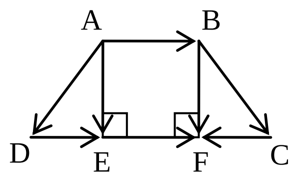


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$

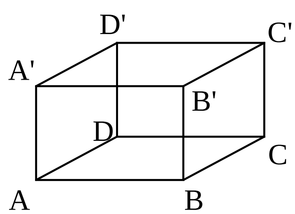
2. על פי השרטוט מתקיימים השיוויונים הבאים:

$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$



3. א. על פי השרטוט מתקבלים השיוויונים הבאים:

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$
2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$
3. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$

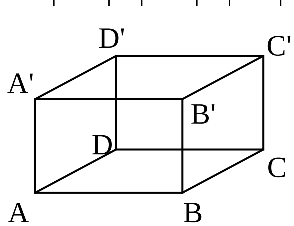


ב. בסעיף א' הצגנו את התיבה כגוף מרחבי המורכב מ- 6 פאות מלבניות, ותכונות המלבנים שהזכרנו היו שצלעותיהם הנגדיות שוות ומקבילות. תיבה היא למעשה מקרה פרטי של מקבילון, כיוון שמקבילון מורכב מ- 6 מקביליות ותיבה מורכבת מ- 6 מלבנים, והרי מלבן הוא מקרה פרטי של מקבילית (מקבילית בעלת זוית ישרה). כיוון שתכונות המלבנים בהן השתמשנו הן תכונות שמאפיינות את כל סוגי המקביליות, התשובה לסעיף א' לא תשתנה אם יהיה מדובר במקבילון (ולאו דווקא בתיבה שהיא מקרה פרטי).

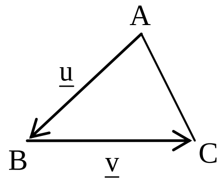
4. א+ב. סעיפים א' ו-ב' זהים כיוון שבשאלה זו מתקיימים שני התנאים הבאים: בסיסי התיבה ריבועיים ובנוסף <u>אין</u> דרישה לגבי כיוונם של הוקטורים אלא רק לגבי גודלם. לכן:

$$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\overrightarrow{A'D'}| = |\overrightarrow{D'A'}| = |\overrightarrow{B'C'}| = |\overrightarrow{C'B'}| = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{C'D'}| = |\overrightarrow{D'C'}| =$$
$$= |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DC}|$$

ג. $|\underline{w}| = |\overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{A'A}| = |\overrightarrow{BB'}| = |\overrightarrow{B'B}| = |\overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{C'C}| = |\overrightarrow{DD'}| = |\overrightarrow{D'D}|$

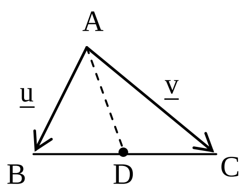


פעולות בוקטורים – מישור – פתרונות



5. א. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\underline{u}+\underline{v}$

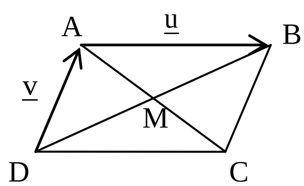
ב. $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\underline{u}+\underline{v})=-\underline{u}-\underline{v}$



6. א. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\underline{v}-\underline{u}$

ב. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\cdot(\underline{v}-\underline{u})$

ג. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\underline{u}+\frac{1}{2}\cdot(-\underline{u}+\underline{v})=\frac{1}{2}\cdot(\underline{u}+\underline{v})$



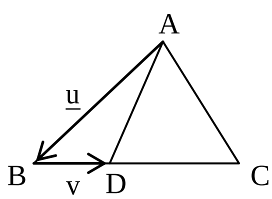
7. א. $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}=-\underline{u}$

ב. $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{DA}=-\underline{v}$

ג. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\underline{v}+\underline{u}$

ד. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=-\underline{v}+\underline{u}=\underline{u}-\underline{v}$

ה. $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\cdot(\underline{u}-\underline{v})=\frac{1}{2}\cdot(\underline{v}-\underline{u})$



8. א. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\underline{u}+\underline{v}$

ב. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{BD}=\underline{u}+t\cdot\underline{v}$

9. א. נשים לב שהיחס $\frac{AM}{BM}=\alpha$ מתייחס לקטעים ולא לוקטורים, לכן אין חשיבות לסדר האותיות.

כלומר, נקבל: $BM=MB=\frac{1}{\alpha}\cdot AM$ (הפכנו את BM ל-MB כי כך AM ו-MB הם באותו כיוון). כשנעבור לוקטורים נקבל:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{\alpha}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\cdot\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AB}=\underline{u}\Rightarrow\underline{u}=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\cdot\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\cdot\underline{u}$$

ב. $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{\alpha}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\cdot\underline{u}=\frac{1}{\alpha+1}\cdot\underline{u}$

10. א. $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{\alpha}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{\alpha}\cdot\underline{u}=\frac{1}{\alpha}\cdot\underline{u}$

ב. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\underline{u}+\frac{1}{\alpha}\cdot\underline{u}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\underline{u}=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\cdot\underline{u}$

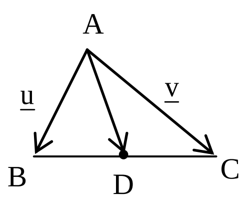
11. א. $\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\underline{u}\right)=\alpha\cdot\overrightarrow{AM}+\alpha\cdot\underline{u}=$

$=\overrightarrow{AM}-\alpha\cdot\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\underline{u}\Rightarrow(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\underline{u}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\underline{u}$

ב. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\underline{u}+\underline{u}=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+1\right)\cdot\underline{u}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\underline{u}$

12. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=$

$=\overrightarrow{AB}-\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{AC}=(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{AC}=(1-\alpha)\cdot\underline{u}+\alpha\cdot\underline{v}$



13. נבטא תחילה את $\overrightarrow{DC}$ באמצעות נתוני השאלה ורק אחר כך את $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{DC}=\alpha\cdot\overrightarrow{BD}=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)=\alpha\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}\right)=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\alpha\cdot\overrightarrow{DC}\Rightarrow$

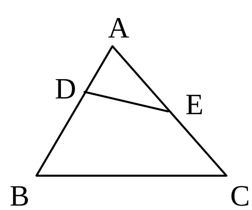
$\Rightarrow\overrightarrow{DC}+\alpha\cdot\overrightarrow{DC}=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow(1+\alpha)\cdot\overrightarrow{DC}=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{DC}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\left(\underline{v}-\underline{u}\right)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}=\underline{v}-\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\left(\underline{v}-\underline{u}\right)=\underline{v}-\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\underline{v}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\underline{u}=$

$\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\cdot\underline{v}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\underline{u}=\frac{1}{1+\alpha}\cdot\underline{v}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\underline{u}$

14. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\cdot\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}=\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{3}\cdot\underline{u}$



15. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\alpha\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\alpha\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}+\alpha\cdot\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=$

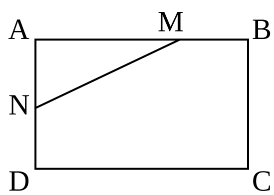
$=\overrightarrow{AD}-\alpha\cdot\overrightarrow{AD}+\alpha\cdot\overrightarrow{AB}=(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{AD}+\alpha\cdot\overrightarrow{AB}=(1-\alpha)\cdot\underline{u}+\alpha\cdot\underline{v}$

16. א. נבטא תחילה את $\overrightarrow{AM}$ ו- $\overrightarrow{NA}$ באמצעות נתוני השאלה ורק אחר כך את $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AM}\Rightarrow\underline{u}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\underline{u}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot\underline{u}$$

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NA}\Rightarrow\overrightarrow{DA}=\beta\cdot\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NA}\Rightarrow\underline{v}=(\beta+1)\overrightarrow{NA}\Rightarrow\overrightarrow{NA}=\frac{1}{(\beta+1)}\cdot\underline{v}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{NA}=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot\underline{u}-\frac{1}{(\beta+1)}\cdot\underline{v}$$



ב. תחילה נבטא את $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DB}=-\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=-(\underline{v}+\underline{u})=-\underline{u}-\underline{v}$$

כדי ששני וקטורים יהיו מקבילים אחד מהם חייב להיות מבוטא על ידי מכפלת השני בסקלר כלשהו. כלומר:

$$\overrightarrow{BD}=t\cdot\overrightarrow{MN}\Rightarrow-\underline{u}-\underline{v}=t\cdot\left(-\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot\underline{u}-\frac{1}{(\beta+1)}\cdot\underline{v}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$-1=-t\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1}$$

$$-1=-t\cdot\frac{1}{\beta+1}$$

$$\Downarrow$$

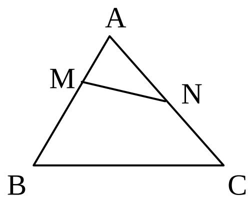
$$-t\cdot\frac{1}{\beta+1}=-t\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1}\Rightarrow\frac{1}{\beta+1}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\Rightarrow$$

$$\alpha+1=\alpha\cdot(\beta+1)\Rightarrow\alpha+1=\alpha\beta+\alpha\Rightarrow\alpha\beta=1$$

17. א. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}-\underline{u}$

ב. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}=\beta\cdot\overrightarrow{AC}-\alpha\cdot\overrightarrow{AB}=\beta\cdot\underline{v}-\alpha\cdot\underline{u}$

ג.



$\alpha=\beta$

$\overrightarrow{MN}=\beta\cdot\underline{v}-\alpha\cdot\underline{u}=\alpha\cdot\left(\underline{v}-\underline{u}\right)=\alpha\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN}\,||\,\overrightarrow{BC}$

18. א.

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NM}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{NB}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CB}\right)=$$

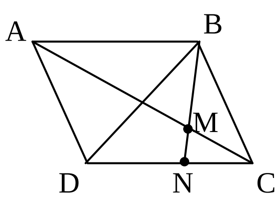
$$=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}-\frac{1}{20}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{4}{20}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{CB}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}\right)=\frac{1}{5}\cdot\left(\underline{u}+\underline{v}\right)$$

ב. במידה ונצליח לבטא את $\overrightarrow{CM}$ כמכפלה של $\overrightarrow{CA}$ בסקלר,

נוכל לומר שהנקודות C , M ו– A על ישר אחד. תחילה נבטא את $\overrightarrow{CA}$:



$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\underline{u}+\underline{v}$

לפיכך, מתקיים: $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{5}\cdot\left(\underline{u}+\underline{v}\right)=\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{CA}$

כלומר: הנקודות C , M ו – A אכן נמצאות על ישר אחד.

פעולות בוקטורים – מרחב – פתרונות

.19

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\boxed{\underline{u}+\frac{1}{2}\cdot\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{B'C'}-\overrightarrow{CC'}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DC}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\underline{u}-\underline{w}-\frac{1}{2}\cdot\underline{v}}$$

.20

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\boxed{-\frac{2}{5}\cdot\underline{u}+\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{A'M}-\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AD}=$$

$$=-\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}=\boxed{\frac{2}{5}\cdot\underline{u}-\frac{3}{4}\cdot\underline{v}-\underline{w}}$$

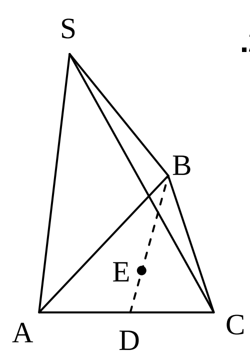
$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{A'M}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{A'D'}+\frac{3}{4}\overrightarrow{A'B'}=-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}=\boxed{\frac{5}{12}\cdot\underline{v}+\underline{w}-\underline{u}}$$

.21



$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}=\boxed{\underline{w}-\underline{u}}$$

$$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{w}-\underline{u}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{w}+\underline{u}\right)}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{w}+\underline{u}\right)-\underline{v}=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\underline{u}-\underline{v}+\frac{1}{2}\cdot\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{SD}-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{w}+\underline{u}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\underline{u}-\underline{v}+\frac{1}{2}\cdot\underline{w}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\underline{w}+\frac{1}{2}\cdot\underline{u}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underline{u}+\frac{1}{3}\cdot\underline{v}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underline{w}=\frac{1}{2}\cdot\underline{w}+\frac{1}{2}\cdot\underline{u}-\frac{1}{6}\cdot\underline{u}+\frac{1}{3}\cdot\underline{v}-\frac{1}{6}\cdot\underline{w}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot\underline{u}+\frac{1}{3}\cdot\underline{v}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot\underline{w}=\boxed{\frac{1}{3}\cdot\left(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}\right)}$$

.22

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}=\boxed{\underline{v}+\underline{w}}$$

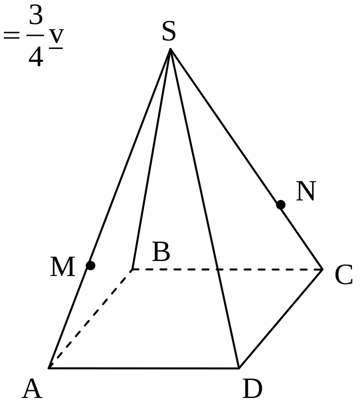
$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\boxed{\underline{v}+\underline{w}-\underline{u}}$$

$$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{CS}-\overrightarrow{CB}=\underline{v}-\left(\underline{v}+\underline{w}-\underline{u}\right)=\underline{v}-\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}=\boxed{\underline{u}-\underline{w}}$$

יש לשים לב שנתון יחס בין קטעים, לכן, לא כמו בוקטורים, כאן אין חשיבות לסדר האותיות.

$$AM=\frac{1}{4}AS\ \Rightarrow SM=\frac{3}{4}AS\ \Rightarrow\overrightarrow{SM}=\frac{3}{4}\underline{w}\quad ;\ SN=\frac{3}{4}SC\ \Rightarrow\overrightarrow{NS}=\frac{3}{4}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SN}=-\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{NS}=\boxed{-\frac{3}{4}\cdot\underline{w}-\frac{3}{4}\cdot\underline{v}}$$

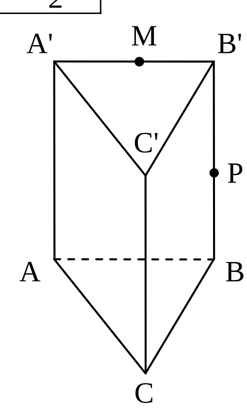


.23

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA'}=\boxed{\underline{u}-\underline{v}+\frac{1}{2}\cdot\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\boxed{\underline{w}-\underline{v}+\frac{1}{2}\cdot\underline{u}}$$

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB'}-\overrightarrow{B'M}=\frac{\overrightarrow{BB'}}{2}-\frac{\overrightarrow{B'A'}}{2}=\frac{\overrightarrow{AA'}}{2}-\frac{\overrightarrow{A'B'}}{2}=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{w}-\underline{u}\right)}$$



24. א.

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\alpha\cdot\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{AA'}=\boxed{\underline{v}+\underline{u}+\alpha\cdot\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'Q}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\alpha\cdot\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{BC}=$$
$$=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{AD}=\boxed{\underline{w}+\underline{u}+\alpha\cdot\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\underline{w}+\underline{u}+\alpha\cdot\underline{v}-\left(\underline{v}+\underline{u}+\alpha\cdot\underline{w}\right)=$$
$$=\alpha\cdot\underline{v}-\underline{v}+\underline{u}-\underline{u}+\underline{w}-\alpha\cdot\underline{w}=\boxed{(\alpha-1)\cdot\underline{v}+(1-\alpha)\cdot\underline{w}}$$

ב. ניתן להביע את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ גם כך: $\overrightarrow{PQ}=(\alpha-1)(\underline{v}-\underline{w})$ כלומר, במידה ונצליח להביע את הוקטורים המבוקשים כמכפלה של סקלר ב-$(\underline{v}-\underline{w})$, פירוש הדבר שהם מקבילים ל-$\overrightarrow{PQ}$. אחרת, הם לא מקבילים.

$$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=-\underline{w}+\underline{v}+\underline{u}=\boxed{\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}}$$

לא ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\nparallel\overrightarrow{A'C}$.

$$A'D=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}=\boxed{\underline{v}-\underline{w}}$$

ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{A'D}$.

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boxed{\underline{v}}$$

לא ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\nparallel\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boxed{\underline{v}-\underline{u}}$$

לא ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\nparallel\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{B'A}=-\overrightarrow{AB'}=-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}\right)=-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}\right)=\boxed{-(\underline{w}+\underline{u})}$$

לא ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\nparallel\overrightarrow{B'A}$.

$$\overrightarrow{B'D}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AD}=-(\underline{w}+\underline{u})+\underline{v}=\boxed{\underline{v}-\underline{w}-\underline{u}}$$

לא ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\nparallel\overrightarrow{B'D}$.

$$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AD}=A'D=\boxed{\underline{v}-\underline{w}}$$

ניתן לבטא וקטור זה כמכפלה של $(\underline{v}-\underline{w})$ בסקלר. לפיכך, $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{B'C}$.

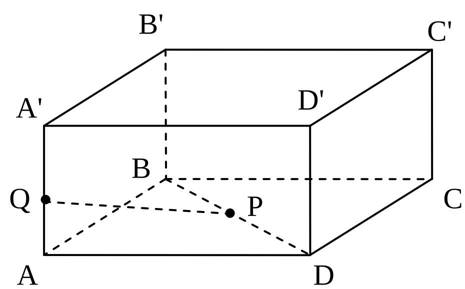
לסיכום, הוקטורים שמקבילים ל-$\overrightarrow{PQ}$ הם: $\overrightarrow{B'C}$ ו-$\overrightarrow{A'D}$.

25. א.

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=-\left(\alpha\cdot\overrightarrow{AA'}\right)+\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{BD}=$$

$$=\overrightarrow{AB}-\alpha\cdot\overrightarrow{AA'}+\beta\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}-\alpha\cdot\overrightarrow{AA'}+\beta\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=$$

$$=\left(1-\beta\right)\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AD}-\alpha\cdot\overrightarrow{AA'}=\boxed{\left(1-\beta\right)\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}-\alpha\cdot\underline{w}}$$



ב.

נבטא את הוקטורים הבאים באמצעות הנתונים ונבדוק עבור אילו ערכי α ו- β ניתן לבטא את $\overrightarrow{QP}$ כמכפלה שלהם בסקלר:

1. הוקטור $\overrightarrow{AB}$ תלוי ב- $\underline{u}$ בלבד. כדי לקבל ש- $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{QP}$, נדאג לאפס את $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ גם בוקטור $\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{AB}=\underline{u}+0\cdot\underline{v}-0\cdot\underline{w}$$
$$\overrightarrow{QP}=\left(1-\beta\right)\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}-\alpha\cdot\underline{w}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\beta=0}$$
$$\boxed{\alpha=0}$$

2. הוקטור $\overrightarrow{AD}$ תלוי ב- $\underline{v}$ בלבד. כדי לקבל ש- $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{QP}$, נדאג לאפס את $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ גם בוקטור $\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{AD}=0\cdot\underline{u}+\underline{v}+0\cdot\underline{w}$$
$$\overrightarrow{QP}=\left(1-\beta\right)\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}-\alpha\cdot\underline{w}$$
$$\Downarrow$$
$$1-\beta=0\Rightarrow\boxed{\beta=1}$$
$$-\alpha=0\Rightarrow\boxed{\alpha=0}$$

3. הוקטור $\overrightarrow{A'D}$ אינו תלוי ב- $\underline{u}$, לכן נאפס את המקדם של $\underline{u}$ גם בוקטור $\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} = \underline{v} - \underline{w}$$
$$\overrightarrow{A'D} = 0 \cdot \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$$
$$\overrightarrow{QP} = (1-\beta) \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} - \alpha \cdot \underline{w}$$
$$\Downarrow$$
$$1-\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{QP} = \underline{v} - \alpha \cdot \underline{w}$$
$$\overrightarrow{A'D} = \underline{v} - \underline{w} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

לאחר שנציב את הערך שהתקבל עבור β ניתן לראות שיחס המקדמים בוקטור $\overrightarrow{A'D}$ הוא $1:(-1)$.

כדי שהוקטורים יקבילו זה לזה, נדאג לאותו יחס גם בין המקדמים של הוקטור $\overrightarrow{QP}$.

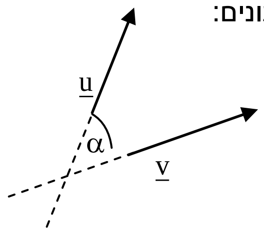
4. הוקטור $\overrightarrow{AC}$ אינו תלוי ב- $\underline{w}$ לכן נדאג לאפס את המקדם של $\underline{w}$ גם בוקטור $\overrightarrow{QP}$.

המקדמים של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ זהים בוקטור $\overrightarrow{AC}$ לכן נדאג שיהיו זהים גם בוקטור $\overrightarrow{QP}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \underline{v} + \underline{u}$$
$$\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v} + 0 \cdot \underline{w}$$
$$\overrightarrow{QP} = (1-\beta) \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} - \alpha \cdot \underline{w}$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$
$$1-\beta = \beta \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

המכפלה הסקלרית – פתרונות

26. נוסחת המכפלה הסקלרית היא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$. נציב את הנתונים:



א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=10\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=40$

ב. $\underline{u}\cdot\underline{v}=6\cdot 20\cdot\cos 120^\circ=-60$

27. א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha=t\cdot t\cdot\cos 0^\circ=t^2$

ב. $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha=t\cdot t\cdot\cos 90^\circ=0$

ג. $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha=t\cdot t\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot t^2$

ד. $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha=t\cdot t\cdot\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\cdot t^2$

28.

$$\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{30}{6\cdot 10}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\alpha=60^\circ}$$

29.

$$\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{-t^2}{2}\cdot\frac{1}{t\cdot t}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\alpha=120^\circ}$$

30.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})}=\sqrt{\underline{u}^2+\cancel{2\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v})}+\underline{v}^2}=\sqrt{|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2}=$$

$$=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(3\underline{u}-2\underline{v})\cdot(3\underline{u}-2\underline{v})}=\sqrt{9\cdot\underline{u}^2\cancel{-2\cdot 3\cdot 2\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}}+4\cdot\underline{v}^2}=$$

$$=\sqrt{9\cdot|\underline{u}|^2+4\cdot|\underline{v}|^2}=\sqrt{9\cdot 2^2+4\cdot 2^2}=\sqrt{52}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\underline{u}+\underline{v})\cdot(3\underline{u}-2\underline{v})=3\cdot\underline{u}^2+\cancel{\underline{u}\cdot\underline{v}}-2\cdot\underline{v}^2=3\cdot|\underline{u}|^2-2\cdot|\underline{v}|^2=3\cdot 2^2-2\cdot 2^2=4$$

$$\cos\measuredangle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{52}}=\frac{4}{\sqrt{8\cdot 52}}=\frac{4}{\sqrt{416}}\Rightarrow\boxed{\measuredangle BAC\approx 78.69^\circ}$$