הפונקציה הטריגונומטרית – תכונות יסוד – פתרונות

1. א. $\sin 90^\circ + \cot 45^\circ = 1 + 1 = 2$

ב. $\cos 0^\circ + \tan 45^\circ = 1 + 1 = 2$

ג. $\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$

ד. $\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ה. $\tan^2 60^\circ + \cot^2 30^\circ = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 6$

ו. $4 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

2. א. 30°

ב. 30°

ג. 30°

ד. נתון שהזווית α היא זוית חדה, על כן, נבחר בפתרון עם הסימן החיובי:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ, \cancel{\alpha = 150^\circ}$$

ה.

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ, \cancel{\alpha = 120^\circ}$$

ו.

$$\tan^2 \alpha = 3 \Rightarrow \tan \alpha = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

ז.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

ח.

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

זהויות בסיסיות – פתרונות

מותר לפתח אגף אחד עד שנקבל את הביטוי שבאגף השני או לעבוד על שני האגפים בו זמנית. יש לפרט אם התחלנו לעבוד עם אגף שמאל (L) , אגף ימין (R) או על שני האגפים בו זמנית.

.3

$$L=\tan\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=R$$

.4

$$L=\cot\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}\cdot\cancel{\sin\alpha}=\cos\alpha=R$$

.5

$$L=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1=R$$

.6

$$L=\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\cot^2\alpha=R$$

.7

$$L=\frac{\sin^3\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha}=\sin\alpha=R$$

.8

$$L=\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=R$$

.9

$$L=(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)=1^2-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=R$$

.10

$$L=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1=$$
$$=1+2\sin\alpha\cos\alpha-1=2\sin\alpha\cos\alpha=R$$

.11

$$L=\cot(90°-\alpha)\cdot\sin(90°-\alpha)-\cos(90°-\alpha)=\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cancel{\sin(90°-\alpha)}}\cdot\cancel{\sin(90°-\alpha)}-\cos(90°-\alpha)=$$
$$=\cos(90°-\alpha)-\cos(90°-\alpha)=0=R$$

.12

$$L=\frac{\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{\cancel{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha}}+\frac{\cancel{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}}=$$
$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1=R$$

.13

$$L=\left(1+\tan^2\alpha\right)\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{\cancel{\cos^2\alpha}}\cdot\cancel{\cos^2\alpha}=1=R$$

.14

$$L=\sin\alpha-\sin^3\alpha=\sin\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=R$$

.15

$$L=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=R$$

.16

$$L=\frac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\left(1-\cos^2\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha=R$$

זהויות הקשורות במעגל הטריגונומטרי - פתרונות

.17 א. $\sin150^\circ=\sin\left(180^\circ-150^\circ\right)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$

ב. $\cos120^\circ=-\cos\left(180^\circ-120^\circ\right)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$

ג. $\tan135^\circ=-\tan\left(180^\circ-135^\circ\right)=-\tan45^\circ=-1$

ד. $\cot120^\circ=\tan\left(90^\circ-120^\circ\right)=\tan\left(-30^\circ\right)=-\tan30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

ה. $\sin240^\circ=\sin\left(180^\circ+60^\circ\right)=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ו. $\cos225^\circ=\cos\left(180^\circ+45^\circ\right)=-\cos45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ז. $\tan210^\circ=\tan\left(180^\circ+30^\circ\right)=\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ח. $\sin270^\circ=\sin\left(180^\circ+90^\circ\right)=-\sin90^\circ=-1$

ט. $\cot 180^\circ$ לא מוגדר.

י. $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

יא. $\tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

יב. $\cot 315^\circ = \cot(360^\circ - 45^\circ) = \cot(-45^\circ) = -1$

יג. $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

יד. $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

טו. $\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

טז. $\sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ = -\sin\left(180^\circ - 150^\circ\right) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

יז. $\sin 780^\circ = \sin(780^\circ - 2\cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

יח. $\cos 1200^\circ = \cos(1200^\circ - 3\cdot 360^\circ) = \cos 120^\circ = -\cos\left(180^\circ - 120^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

יט. $\tan 1665^\circ = \tan\left(1665^\circ - 4\cdot 360^\circ\right) = \tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$

כ. $\sin 3780^\circ = \sin\left(3780^\circ - 10\cdot 360^\circ\right) = \sin 180^\circ = 0$

18. א. $150^\circ, 30^\circ$

ב. $300^\circ, 240^\circ$

ג. $360^\circ, 180^\circ, 0^\circ$

ד. $315^\circ, 45^\circ$

ה. $120^\circ, 240^\circ$

ו. $270^\circ, 90^\circ$

ז. $225^\circ, 45^\circ$

ח. $300^\circ, 120^\circ$

ט. $315^\circ, 225^\circ, 135^\circ, 45^\circ$

י. $300^\circ, 240^\circ, 120^\circ, 60^\circ$

19. א.

$$L=\cos(270°+\alpha)=\cos(360°-(270°+\alpha))=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha=R$$

ב.

$$L=\tan(90°+\alpha)=\frac{\sin(90°+\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}=\frac{\cos(90°-(90°+\alpha))}{\sin(90°-(90°+\alpha))}=$$

$$=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot\alpha=R$$

ג.

$$L=\sin(270°-\alpha)=-\sin(360°-(270°-\alpha))=-\sin(90°+\alpha)=-\sin(180°-(90°-\alpha))=$$

$$=-\sin(90°-\alpha)=-\cos\alpha=R$$

ד.

$$L=\cos(90°+\alpha)=\sin(90°-(90°+\alpha))=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=R$$

20. א.

$$L=\sin(180°-\alpha)-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0=R$$

ב.

$$L=\cos(180°-\alpha)+\cos\alpha=-\cos\alpha+\cos\alpha=0=R$$

ג.

$$L=\sin(180°-\alpha)+\sin(-\alpha)=\sin\alpha-\sin\alpha=0=R$$

ד.

$$L=\cos(180°-\alpha)+\cos(-\alpha)=-\cos\alpha+\cos\alpha=0=R$$

ה.

$$L=\sin(\alpha+180°)-\sin(-\alpha)=-\sin\alpha+\sin\alpha=0=R$$

ו.

$$L=\frac{\tan(180°-\alpha)}{\tan(-\alpha)}=\frac{\cancel{-\tan\alpha}}{\cancel{-\tan\alpha}}=1=R$$

ז.

$$L=\sin^2(180°-\alpha)+\cos^2(180°-\alpha)=\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1=R$$

ח.

$$L=\sin^2(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)=(-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha=1=R$$

ט.

$$L=\tan(180°-\alpha)\cdot\cos(180°-\alpha)+\sin(-\alpha)=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cancel{\cos(180°-\alpha)}}\cdot\cancel{\cos(180°-\alpha)}-\sin\alpha=$$

$$=\sin(180°-\alpha)-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0=R$$

י.

$$L=\frac{\sin(180°-\alpha)}{1-\cos(-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cdot(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}=$$

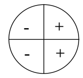
$$=\frac{\cancel{\sin\alpha}\cdot(1+\cos\alpha)}{\sin^{\cancel{2}}\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos(180°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}=R$$

חישובי ביטויים הקשורים בזהויות בסיסיות – פתרונות

21. א.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ \Rightarrow\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\ \Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ \Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

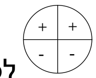
פונקציית הקוסינוס חיובית ברביעים הראשון והרביעי: 

לכן, בתחום: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ נקבל: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

ב. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{\not 5}}{\frac{4}{\not 5}} = \frac{3}{4}$.

22. א.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

פונקצית הסינוס חיובית ברביעים הראשון והשני:  לכן, בתחום: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ נקבל: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

ב. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$.

23. א. נפתור את התרגיל באמצעות הזהות $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$:

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \xrightarrow{\tan\alpha=\frac{8}{15}} 1+\frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{289}{225} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{15}{17}$$

הזוית α ברביע השלישי, לכן: $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$

ב. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{8}{15} = \frac{\sin\alpha}{-\frac{15}{17}} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{8}{17}$

24. א.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \pm\frac{24}{25}$$

הזוית α ברביע הרביעי, לכן: $\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

ב. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = -\frac{7}{24}$.

25. א. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-a^2}$.

הזוית α ברביע הראשון, לכן: $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$.

ב. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

זהויות שונות – רמה בסיסית – פתרונות

.26

$$L=1+\cos 2\alpha=\cancel{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}=2\cos^2\alpha=R$$

.27

$$L=1-\cos 2\alpha=\cancel{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha=R$$

.28

$$L=\sin 4\alpha=\sin\left(2\cdot 2\alpha\right)=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=R$$

.29

$$L=\sin 10\alpha=\sin\left(2\cdot 5\alpha\right)=2\sin 5\alpha\cos 5\alpha=R$$

.30

$$L=\cos 6\alpha=\cos\left(2\cdot 3\alpha\right)=\cos^2 3\alpha-\sin^2 3\alpha=R$$