

הפונקציה הטריגונומטרית – תכונות יסוד

להלן ערכי הפונקציות הטריגונומטריות לזוויות מיוחדות:

90°	60°	45°	30°	0°	
$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	sin
$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	cos
לא מוגדר	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר	cot

1. חשב תוך שימוש בטבלה:

א. $\sin 90^\circ + \cot 45^\circ$ ג. $\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ$ ה. $\tan^2 60^\circ + \cot^2 30^\circ$

ב. $\cos 0^\circ + \tan 45^\circ$ ד. $\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ$ ו. $4 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$

2. מצא ללא עזרת מחשבון את גודל הזווית החדה α במקרים הבאים:

א. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ד. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$ ז. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$

ב. $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ה. $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$ ח. $\sin^4 \alpha = \frac{1}{4}$

ג. $\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ו. $\tan^2 \alpha = 3$

זהויות טריגונומטריות

זהויות בסיסיות

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$	$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	
$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$		

הוכח את הזהויות הבאות:

$(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$.9	$\tan \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$.3
$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.10	$\cot \alpha \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$.4
$\cot(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) = 0$.11	$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$.5
$\frac{\sin^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = 1$.12	$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot^2 \alpha$.6
$(1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = 1$.13	$\frac{\sin^3 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$.7
$\sin \alpha - \sin^3 \alpha = \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.14	$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.8
$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.15	
$\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \cot \alpha$.16	

זהויות הקשורות במעגל הטריגונומטרי

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(180^\circ + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

17. חשב ללא עזרת מחשבון:

$\tan 210^\circ$.א	$\sin 240^\circ$.ב	$\tan 135^\circ$.ג	$\sin 150^\circ$.ד
$\sin 270^\circ$.ה	$\cos 225^\circ$.ו	$\cot 120^\circ$.ז	$\cos 120^\circ$.ח

$\cos 1200^\circ$.ח.	$\tan(-60^\circ)$.ט.	$\cot 315^\circ$.יב.	$\cot 180^\circ$.ט.
$\tan 1665^\circ$.ט.	$\sin(-150^\circ)$.זט.	$\sin(-30^\circ)$.ג.	$\cos 300^\circ$.י.
$\sin 3780^\circ$.כ.	$\sin 780^\circ$.ז.	$\cos(-45^\circ)$.יד.	$\tan 330^\circ$.יא.

18. מצא את הזווית α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) המקיימת:

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$.י.	$\tan \alpha = 1$.ז.	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.ד.	$\sin \alpha = \frac{1}{2}$.א.
	$\tan \alpha = -\sqrt{3}$.ח.	$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.ה.	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.ב.
	$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.ט.	$\cos \alpha = 0$.ו.	$\sin \alpha = 0$.ג.

19. הוכח את הזהויות הבאות:

$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.ג.	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$.א.
$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.ד.	$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$.ב.

20. הוכח את הזהויות הבאות:

$\sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.ז.	$\sin(180^\circ - \alpha) - \sin \alpha = 0$.א.
$\sin^2(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) = 1$.ח.	$\cos(180^\circ - \alpha) + \cos \alpha = 0$.ב.
$\tan(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + \sin(-\alpha) = 0$.ט.	$\sin(180^\circ - \alpha) + \sin(-\alpha) = 0$.ג.
$\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{1 - \cos(-\alpha)} = \frac{1 - \cos(180^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)}$.י.	$\cos(180^\circ - \alpha) + \cos(-\alpha) = 0$.ד.
	$\sin(\alpha + 180^\circ) - \sin(-\alpha) = 0$.ה.
	$\frac{\tan(180^\circ - \alpha)}{\tan(-\alpha)} = 1$.ו.

חישובי ביטויים הקשורים בזהויות בסיסיות

חשב את הביטויים הבאים ללא עזרת מחשבון:

21. נתון: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. מצא את:

א.	$\cos \alpha$	ב.	$\tan \alpha$
----	---------------	----	---------------

22. נתון: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$. מצא את:

א.	$\sin \alpha$	ב.	$\tan \alpha$
----	---------------	----	---------------

.23 נתון: $\tan \alpha = \frac{8}{15}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. מצא את:
 א. $\cos \alpha$ ב. $\sin \alpha$

.24 נתון: $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. מצא את:
 א. $\cos \alpha$ ב. $\tan \alpha$

.25 נתון: $\sin \alpha = a$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. הבע באמצעות a את:
 א. $\cos \alpha$ ב. $\tan \alpha$

זהויות שונות- רמה בסיסית

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \end{aligned}$$

הוכח את הזהויות הבאות:

.26 $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

.27 $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

.28 $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha$

.29 $\sin 10\alpha = 2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha$

.30 $\cos 6\alpha = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$