בעיות תנועה – פתרונות

1. המרחק בין שני הרוכבים בהתחלה הוא 184 ק"מ, לכן זהו גם המרחק שעוברים שניהם ביחד עד הפגישה. לזמן שעבר מהרגע שיצא הרוכב הראשון לדרך ועד לפגישה נקרא- t_1. הרוכב השני יצא חצי שעה אחריו, לכן הזמן שעבר מרגע יציאתו עד הפגישה, קטן בחצי שעה משל הראשון, ונבטא אותו כך: $t_2 = t_1 - \frac{1}{2}$. המרחק שעבר כל אחד מהם שווה לזמן הרכיבה שלו כפול מהירותו. המרחק שעבר הרוכב הראשון, שמהירותו 32 קמ"ש, הוא: $32 \cdot t_1$, והמרחק שעבר הרוכב השני, שמהירותו 24 קמ"ש, הוא: $24 \cdot t_2 = 24 \cdot \left(t_1 - \frac{1}{2}\right)$. עכשיו אפשר ליצור משוואה מסכום המרחקים של השניים ולמצוא את זמן רכיבתו של הרוכב הראשון.
את הזמן נוסיף לשעת היציאה שלו, $7:00$, וכך נגלה באיזו שעה ייפגשו הרוכבים.

$$32 \cdot t_1 + 24 \cdot \left(t_1 - \frac{1}{2}\right) = 184 \Rightarrow t_1 = 3.5$$

הרוכבים נפגשו 3.5 שעות אחרי השעה $7:00$, כלומר בשעה $10:30$.

2. נסמן את מהירות המשאית מ- A ל- B: V_{AB}.
ולכן מהירות המשאית מ- B ל- C: $V_{BC} = V_{AB} - 30$

$$AB = BC \Rightarrow 3 \cdot V_{AB} = 4 \cdot V_{BC} \Rightarrow 3 \cdot V_{AB} = 4 \cdot \left(V_{AB} - 30\right) \Rightarrow V_{AB} = 120$$

המהירות בקטע AB היא $V_{AB} = 120$ קמ"ש.
בקטע BC המהירות היא: $V_{BC} = V_{AB} - 30 = 90$ קמ"ש.

3. 63 ק"מ

4. כעבור 3 שעות.

5. נסמן את המרחק ומהירות מקרית גת לאשדוד ב- x_1, v_1.
המרחק ומהירות מאשדוד לקריית גת: $v_2 = 0.8v_1 \quad x_2 = 0.2x_1$

$$\frac{\frac{x_2}{v_2}}{\frac{x_1}{v_1}} = \frac{\frac{0.2x_1}{0.8v_1}}{\frac{x_1}{v_1}} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

זמן הנסיעה בדרך חזרה מהווה 25% מזמן הנסיעה בדרך הלוך.

6. 200 קמ"ש.

7. א. הנתונים: $d = 400_{km}$, $V_2 = v$, $V_1 = 2v$, ונרכיב את המשוואה:

$$400 - \left(1 \cdot V_1\right) - \left(1 \cdot V_2\right) = 400 - 3v$$

נסיק כי שעה אחרי שיצאו לדרכן, המרחק בין המכוניות הוא: $400 - 3v$.

ב. $400 - V_1 \cdot t - V_2 \cdot t = 400 - 3vt$
אחרי t שעות, המרחק בין המכוניות הוא $400 - 3vt$.

ג. $400 - 2 \cdot V_1 - 2 \cdot V_2 = 160 \Rightarrow 400 - 6v = 160 \Rightarrow v = 40$
בהתאם לנתונים, המהירות היא $v = 40$ קמ"ש.

8. נקרא למהירות הסירה- v_1, ולמהירות זרם המים- v_2. עלינו להבין שהמהירות הכללית שונה בדרך הלוך ובדרך חזור, מכיוון שבאחת הפעמים הסירה נעה עם כיוון המהירות של זרם המים, ואז מהירותה שווה לסכום המהירויות: v_1+v_2, ובפעם השנייה הסירה נעה בכיוון המנוגד לכיוון מהירות זרם המים, ואז יש להחסיר את מהירות הזרם ממהירות הסירה: v_1-v_2.

בדרך הלוך הסירה יצאה ב- 8 והגיעה ב- 10, כלומר לקח לה שעתיים, ובדרך חזור היא יצאה ב- 11 והגיעה ב- 2 אחר הצהריים, כלומר לקח לה 3 שעות. מהעובדה שהדרך הלוך לקחה לה פחות זמן, אפשר להסיק שזו הדרך בה היא נעה בכיוון הזרם ומהירותה הכללית הייתה גבוהה יותר.

כעת אפשר לבנות מערכת של שתי משוואות של זמן, מהירות ודרך, אחת מהדרך הלוך ואחת מהדרך חזור:

$$\begin{cases}2\cdot(v_1+v_2)=36\\3\cdot(v_1-v_2)=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1+v_2=18\\v_1-v_2=12\end{cases}\xrightarrow{+}2\cdot v_1=30\Rightarrow v_1=15\quad v_2=3$$

נסיק כי מהירות הסירה היא $v_1=15$ קמ"ש, ומהירות הזרם היא $v_2=3$ קמ"ש.

9. מטוס מלוד: 300 קמ"ש, מטוס מקפריסין: 240 קמ"ש.

10. המהירות בשעתיים הראשונות: $v_1=5$. המהירות לאחר מכן: $v_2=6$.

המרחק בין העבודה לבית: d. זמן ההליכה לאחר השעתיים: t

$$\begin{cases}2\cdot v_1+t\cdot v_2=d\\\left(2+t+\frac{1}{6}\right)\cdot v_1=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10+6t=d\\5t+10\frac{5}{6}=d\end{cases}\xrightarrow{-}t=\frac{5}{6}\Rightarrow d=10+6\cdot\frac{5}{6}=15$$

המרחק בין העבודה לבית הוא: $d=15$ ק"מ.

11. 40 קמ"ש.

12. נקרא למהירויות שתי המכוניות: v_1 ו- v_2. המרחקים שעברה כל אחת מהן במהלך 9 שעות עד שנפגשו הם: $9v_1$ ו- $9v_2$.

כיוון שאנו יודעים מנתוני השאלה כי המרחק ההתחלתי ביניהן הוא 90 ק"מ, המרחק שעברה אחת המכוניות עד הפגישה, גדול ב- 90 ק"מ מהמרחק שעברה המכונית השנייה, לכן נרכיב שתי משוואות:

1. משוואה ובה נייצג את הפרשי המרחקים(לא רלוונטי את מי מחסירים ממי):

$$9\cdot v_1-9\cdot v_2=90$$
$$v_1-v_2=10$$

2. משוואה ובה נייצג את המכוניות כשהן נוסעות זו לעבר זו, ואז סכום המרחקים שווה ל- 90 ק"מ:

$$1\cdot v_1+1\cdot v_2=v_1+v_2=90$$

נחבר את שתי המשוואות ונפתור:

$$+\begin{cases}v_1+v_2=90\\v_1-v_2=10\end{cases}\Rightarrow 2v_1=100\Rightarrow v_1=50\ ,\ v_2=40$$

מהירותה של מכונית אחת היא $v_1=50$ קמ"ש, ושל השנייה $v_2=40$ קמ"ש.

13. 24 קמ"ש.

14. נסמן את המרחק בין ת"א לרשפון ב- x.

הזמן שלקח בפועל לנסוע הלוך חזור(הזמן שווה לדרך חלקי המהירות $t=\frac{x}{v}$): $t=\frac{x}{12}+\frac{x}{18}$

הזמן שהיה לוקח אילו המהירות הממוצעת הייתה 15 קמ"ש: $t-\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{12} + \frac{x}{18} \\ 15 \cdot \left(t - \frac{1}{3} \right) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5 \cdot x}{36} \\ 15t = 2x + 5 \end{cases} \xrightarrow{I \to II} 15 \cdot \left(\frac{5x}{36} \right) = 2x + 5 \Rightarrow x = 60$$

המרחק בין רשפון לת"א הוא: $x = 60$ ק"מ.

15. נתון המרחק: $AB = 28$ ק"מ, מהירות הרוכב $v_1 = 10$ קמ"ש
ומהירות הולך הרגל $v_2 = 4$ קמ"ש.
עד פגישתם הרוכב יספיק לעבור את כל הדרך ואף לחזור ולפגוש את ההולך, כך שיחדיו הם עברו פעמיים את כל הדרך, כלומר 56 ק"מ.
נבנה משוואה המבטאת את מרחק זה: $4 \cdot t + 10 \cdot t = 56 \Rightarrow t = 4$
בתום ארבע שעות הם נפגשו. ההולך הספיק להתרחק בזמן זה מעיר A 16 ק"מ.

16. נסמן: היקף הכיכר: x, המרחק בין ירושלים לת"א: d.

$$x = 2\pi R \Rightarrow d = 4x = 4 \cdot 2\pi R = 8\pi R$$

המרחק בין ת"א לירושלים הוא $8\pi R$ ק"מ.

17. נסמן ב- D את המרחק של כל אחד מהם מתמר(שהוא מחצית מאלכסון הריבוע של מגוריהם).
האותיות שמייצגות את דני, יוסי, איציק ורמי הן r , i , y , d בהתאמה. לפי הנתון:

$$v_d = x, \quad v_r = 2x, \quad v_i = 4x, \quad v_y = 8x$$

$$(2D)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 4D^2 = 2a^2 \Rightarrow D^2 = \frac{2a^2}{4} \xrightarrow{\sqrt{\ }} D = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}$$

כעת נבטא את הזמן שלקח לכל אחד מהארבעה להגיע לתמר:

- הזמן שלקח לדני: $t_d = \frac{d}{v_d} = \frac{\sqrt{2}a}{2x}$ שעות
- הזמן שלקח לרמי: $t_r = \frac{d}{v_r} = \frac{\sqrt{2}a}{2 \cdot 2x} = \frac{\sqrt{2}a}{4x}$ שעות
- הזמן שלקח לאיציק: $t_i = \frac{d}{v_i} = \frac{\sqrt{2}a}{2 \cdot 4x} = \frac{\sqrt{2}a}{8x}$ שעות
- הזמן שלקח ליוסי: $t_y = \frac{d}{v_y} = \frac{\sqrt{2}a}{2 \cdot 8x} = \frac{\sqrt{2}a}{16x}$ שעות.

18. המרחק שעבר איש אחד בשעתיים הוא $2a$.
את המרחק שעבר האיש השני נייצג כ- b. את המרחק שעבר השני נמצא בעזרת משפט פיתגורס, כאשר המרחק שעבר כל אחד מהשניים מייצג ניצב, והמרחק ביניהם הוא היתר(השניים יצאו לכיוונים מאונכים זה לזה):

$$x^2 = (2a)^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{x^2 - 4a^2}.$$

כדי למצוא את המרחקים אחרי 5 שעות, נכפול ב- 2.5 את המרחקים שהם עברו בשעתיים(שעתיים כפול 2.5 שווה ל- 5 שעות). המרחקים החדשים:

$$d_1 = \frac{5}{2} \cdot 2a = 5a \quad ; \quad d_2 = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4a^2}$$

את המרחק ביניהם נחשב שוב לפי פיתגורס:

$$d' = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{(5a)^2 + \left(\frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4a^2}\right)^2} = \sqrt{25a^2 + 6.25x^2 - 25a^2} = \sqrt{6.25x^2} = \frac{5}{2}x$$

כעבור 5 שעות המרחק בין השניים הוא $\frac{5}{2}x$ ק"מ.

19. $27x + W$ ק"מ.

20. ראשית נסמן את המהירויות v_2 ו- $v_1 = v_2 + 10$.

כעת נבנה שתי משוואות בעזרתן נוכל למצוא את מהירותה של המכונית הראשונה:

$$\begin{cases} v_2 \cdot t = 100 \\ v_1 \cdot \left(t - \frac{5}{6}\right) = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{100}{v_1 - 10} \\ v_1 \cdot t - \dfrac{5}{6} v_1 = 100 \end{cases} \xrightarrow{I \to II} v_1 \cdot \frac{100}{v_1 - 10} - \frac{5}{6} v_1 = 100 \Rightarrow$$

$$600v_1 - 5v_1 \cdot (v_1 - 10) = 600(v_1 - 10) \Rightarrow v_1^2 - 10v_1 - 1200 = 0 \Rightarrow v_1 = 40$$

מהירות המכונית הראשונה היא $v_1 = 40$ קמ"ש.

21. מהירות המשאית: 42 קמ"ש. מהירות האוטובוס: 54 קמ"ש.

בעיות קניה ומכירה – פתרונות

22. בשאלה זו אפשר להבחין במשוואה אחת עם 2 נעלמים, ולכן נצטרך 2 משוואות בכדי לפתור את השאלה, נסמן ב- x את המחיר לק"ג תפוזים וב- y את המחיר לק"ג תפוחים.

המשוואות שיצאו לנו כתוצאה מסימון זה הן:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 31 \\ 6x + 5y = 50 \end{cases}$$

בכדי לפתור את המשוואות אנו צריכים לבטל את אחד המשתנים בעזרת חיבור או חיסור המשוואות ולכן נכפיל את המשוואה הראשונה ב- 2 בכדי להגיע לאותו מקדם של x:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 31 \;/ \cdot 2 \\ 6x + 8y = 62 \end{cases}$$

כעת בעזרת חיסור אנו יכולים להחסיר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$-\begin{cases} 6x + 8y = 62 \\ 6x + 5y = 50 \end{cases}$$

$$3y = 12 \;/ \div 3$$

$$y = 4$$

מחירו של ק"ג תפוחים 4 שקלים.

כעת נציב את המשתנה באחת המשוואות בכדי למצוא את מחירו של ק"ג תפוזים.

$3x + 4 \cdot 4 = 31 \Rightarrow 3x + 16 = 31$

$3x = 15 \ / \ \div 3$

$x = 5$

ונקבל כי מחירו של ק"ג תפוזים הוא 5 שקלים.

23. ניצור מערכת משוואות המתאימה לתיאור הבעיה:

$$\begin{cases} 10x + 6y = 49 \\ 5x = 3y + 3.5 \end{cases}$$

$I \ 2 \cdot (3y + 3.5) + 6y = 49 \Rightarrow 6y + 7 + 6y = 49 \Rightarrow 12y = 42 \Rightarrow y = 3.5$

$I \ 10x + 6 \cdot 3.5 = 49 \Rightarrow 10x + 21 = 49 \Rightarrow 10x = 28 \Rightarrow x = 2.8$

מחירו של ק"ג בננות הוא 2.8 שקלים ומחירו של ק"ג אגסים הוא 3.5 שקלים.

24. בשאלה זו אפשר להבחין במשוואה עם 2 נעלמים, ולכן נצטרך 2 משוואות בכדי לפתור את השאלה. נסמן את מחירה של חבילת מרגרינה ב- x ואת מחירה של חבילת חמאה ב- y.

מסימון זה נגיע ל- 2 משוואות:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 27 \\ 10x = 6y \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה אפשר לחלץ את אחד מהמשתנים ולאחר מכן להציבו במשוואה הראשונה:

$10x = 6y \ / \div 10$

$x = 0.6y$

כעת נציב את x במשוואה הראשונה:

$4 \cdot 0.6y + 3y = 27$

$2.4y + 3y = 27$

$5.4y = 27 \ / \div 5.4$

$y = 5$

המחיר של חבילת חמאה הוא 5 שקלים לחבילה.

כעת נציב את y במשוואה השנייה בכדי למצוא את ערכו של x :

$10x = 6 \cdot 5 \Rightarrow 10x = 30 \ / \div 10$

$x = 3$

המחיר של חבילת מרגרינה הוא 3 שקלים.

25. בשאלה זו אפשר להבחין במשוואה עם 2 נעלמים, ולכן נצטרך 2 משוואות בכדי למצוא את המחיר של עיפרון ומחיר של מחברת, ומשוואה שלישית בכדי למצוא מה המחיר שקרן שילמה.

נסמן מחיר של מחברת אחת ב- x ומחיר של עפרון אחד ב- y וכך נגיע ל- 2 משוואות:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$$

בכדי לפתור את מערכת המשוואות נכפיל את המשוואה הראשונה פי 2 :

$3x + 2y = 4 \ / \cdot 2$

$6x + 4y = 8$

כעת נחסיר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$-\begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$x = 1$$

מחירה של מחברת אחת הוא שקל אחד. כעת נציב את ערכו של x במשוואה הראשונה בכדי למצוא את y:

$$3 \cdot 1 + 2y = 4 \Rightarrow 3 + 2y = 4$$

$$2y = 1 / \div 2 \Rightarrow y = 0.5$$

מחיר עיפרון אחד הוא 0.5 שקלים. כעת נחשב כמה עולים 4 מחברות ו-3 עפרונות:

$$4x + 3y = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0.5 = 4 + 1.5 = 5.5$$

המחיר שקרן שילמה עבור 3 עפרונות ו-4 מחברות הוא 5.5 שקלים.

26. נייצג את מספר הילדים שהגיעו לבריכה ב-y ואת מספר המבוגרים שהגיעו לבריכה ב-x. ניצור מערכת של 2 משוואות ב-2 נעלמים:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 11x + 8y = 148 \end{cases}$$

נבודד את x במשוואה הראשונה ונציב את ערכו במשוואה השנייה:

$$\text{I} \quad x = 17 - y$$

$$\text{II} \quad 11 \cdot (17 - y) + 8y = 148 \Rightarrow 187 - 11y + 8y = 148 \Rightarrow 3y = 39 / \div 3 \Rightarrow y = 13$$

מספר הילדים שהגיעו לבריכה הוא 13.

כעת, בכדי למצוא את מספר המבוגרים נציב את y במשוואה הראשונה:

$$x = 17 - y \Rightarrow x = 17 - 13 = 4$$

מספר המבוגרים שהגיעו לבריכה הוא 4.

27. מחירו המקורי של הארון: x

מחירו לאחר ההעלאה: $120\% x = 1.2x$

מחירו לאחר ההורדה: $80\% \cdot (1.2x) = 0.8 \cdot 1.2x = 0.96x$

כלומר על פי הנתון: $0.96x = 2760 \xrightarrow{:0.96} x = 2875$

מחירו המקורי של הארון הוא $2,875$ שקלים.

28. ראשית נציב:

משכורתו של דן: x.

משכורתו הראשונית של דוד: y.

$$\begin{cases} x = 1200 + y \\ x = 1.2y \end{cases}$$

$$1.2y = y + 1200$$

$$0.2y = 1200 / \div 0.2$$

$$y = 6000$$

$$x = 6000 + 1200 = 7200$$

משכורתו של דן היא $7,200$.

29. ראשית נציב:

מחיר ק"ג פלפלים: x.

מחיר ק"ג עגבניות: $120\%x = 1.2x$.

$$10 \cdot 1.2x + 8x = 80$$

$$12x + 8x = 80 \Rightarrow 20x = 80 \xrightarrow{:20} x = 4$$

מחיר ק"ג פלפלים הוא 4 שקלים.

30. מחיר מיטה: x.

מחיר הובלה: y.

$$\begin{cases} x + y = 930 \\ 1.2x + y = 1100 \end{cases}$$

$$\text{I} \quad y = 930 - x$$

$$\text{II} \quad 1.2x + 930 - x = 1100 \Rightarrow 0.2x = 170 \Rightarrow x = 850$$

מחירה של מיטה בלבד הוא 850 שקלים.