מספרים מרוכבים - פתרונות

1.

א. $\pm 3i$[1]
ב. $\pm\frac{1}{2}i$
ג. $\pm 4i$
ד. $\pm 0.1i$
ה. $\pm\sqrt{5}\cdot i$
ו. $\pm ai$
ז. $\pm\sqrt{\left(1+a^2\right)}\cdot i$
ח. $\pm\left(a-2\right)i$

פתרון סעיף א: $\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9\cdot i^2}=\pm 3i$

פתרון סעיף ח: $\sqrt{-a^2+4a-4}=\sqrt{-\left(a-2\right)^2}=\sqrt{\left(a-2\right)^2 i^2}=\pm\left(a-2\right)i$

2.

סעיף	z	Re(z)	Im(z)
א.	$1-2i$	1	-2
ב.	$-\sqrt{3}-i$	$-\sqrt{3}$	-1
ג.	$5i$	0	5
ד.	-3	-3	0
ה.	$a+1-bi$	$a+1$	$-b$
ו.	$a-b+i$	$a-b$	1
ז.	$1-abi$	1	$-ab$
ח.	$(a+1)+(2b-1)i$	$a+1$	$ab-1$
ט.	$a-1$	$a-1$	0
י.	$(1-a)i$	0	$1-a$

3.

סעיף	i^n	1	-1	i	$-i$
א.	i^{12}	♥			
ב.	i^{42}		♥		
ג.	i^{37}			♥	
ד.	i^{120}	♥			
ה.	i^{99}				♥
ו.	i^{61}			♥	
ז.	i^{50}		♥		
ח.	i^{71}				♥
ט.	i^{-3}			♥	

[1] **הערה:** בניגוד למוסכם ולמקובל בקבוצת מספרים ממשיים עבור הוצאת שורש ריבועי, מוגדרת התוצאה של הוצאת שורש ריבועי ממספר מרוכב כמספר כלשהו שהעלאתו בריבוע מוליכה למספר הנמצא מתחת לסימן השורש. לכן בקבוצת מספרים מרוכבים מתקיים $\sqrt{4}=\pm 2$, $\sqrt{9}=\pm 3$, וכמובן $\sqrt{-4}=\pm 2i$, $\sqrt{-9}=\pm 3i$.

י.	i^{-5}				♥
יא.	i^{4n+2}		♥		
יב.	i^{4n-1}				♥

פתרון סעיף ז: $i^{50}=i^{48+2}=i^{48}\cdot i^{2}=(i^{4})^{12}\cdot i^{2}=1^{12}\cdot(-1)=-1$

פתרון סעיף י: $i^{-5}=\frac{1}{i^{5}}=\frac{1}{i^{4}\cdot i}=\frac{1}{1\cdot i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^{2}}=\frac{i}{-1}=-i$

פתרון סעיף יב: $i^{4n-1}=\frac{i^{4n}}{i^{1}}=\frac{(i^{4})^{n}}{i}=\frac{1^{n}}{i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^{2}}=\frac{i}{-1}=-i$

4. א. 0 ב. i ג. $-i$ ד. $-i$ ה. -1 ו. -1 ז. i ח. $10,000$

פתרון סעיף ג:

דרך א': לפי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית $S_n=\frac{a_1\cdot\left(q^{n}-1\right)}{q-1}$:

$$\left(i+i^{2}+i^{3}+...+i^{61}\right)^{19}=\left[\frac{i\cdot\left(i^{61}-1\right)}{i-1}\right]^{19}=\left[\frac{i\cdot\left(i^{60}\cdot i-1\right)}{i-1}\right]^{19}=\left[\frac{i\cdot\left((i^{4})^{15}\cdot i-1\right)}{i-1}\right]^{19}=$$

$$\left[\frac{i\cdot\left(1^{15}\cdot i-1\right)}{i-1}\right]^{19}=\left[\frac{i\cdot\cancel{(i-1)}}{\cancel{i-1}}\right]^{19}=i^{19}=i^{16+3}=(i^{4})^{4}\cdot i^{3}=1^{4}\cdot(-i)=-i$$

דרך ב': ראשית כל נציין כי $i+i^{2}+i^{3}+i^{4}=0$ ולאחר מכן ניעזר בתכונת המחזוריות של חזקות היחידה המדומה, דהיינו:

$$i=i^{5}=i^{9}=...=i^{57}$$
$$i^{2}=i^{6}=i^{10}=...=i^{58}$$
$$i^{3}=i^{7}=i^{11}=...=i^{59}$$
$$i^{4}=i^{8}=i^{12}=...=i^{60}$$

יוצא כי בסכום הנתון $i+i^{2}+i^{3}+...+i^{61}$ מתאפס סכומם של כל ארבעה איברים סמוכים. נציין כי ישנן 15 רביעיות כאלה וזאת בנוסף לאיבר האחרון i^{61}. לכן

$$i+i^{2}+i^{3}+...+i^{61}=\underbrace{(i+i^{2}+i^{3}+i^{4})+(i^{5}+i^{6}+i^{7}+i^{8})+...+(i^{57}+i^{58}+i^{59}+i^{60})}_{15X4}+i^{61}=$$

$$\underbrace{0+0+...+0}_{15}+i^{61}=i^{61}=i^{60+1}=i^{60}\cdot i=(i^{4})^{15}\cdot i=1^{15}\cdot i=i$$

לכן

$$\left(i+i^{2}+i^{3}+...+i^{61}\right)^{19}=i^{19}=i^{16+3}=(i^{4})^{4}\cdot i^{3}=1^{4}\cdot(-i)=-i$$

פתרון סעיף ה:

דרך א': לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$:

$$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}=i^{1+2+\ldots+100}=i^{\frac{(1+100)\cdot100}{2}}=i^{5050}=i^{5048+2}=(i^4)^{1262}\cdot i^2=1^{1262}\cdot(-1)=-1$$

דרך ב': ראשית כל נציין כי $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4=-1$ ולאחר מכן ניעזר בתכונת המחזוריות של חזקות היחידה המדומה, דהיינו:

$$i=i^5=i^9=\ldots=i^{97}$$
$$i^2=i^6=i^{10}=\ldots=i^{98}$$
$$i^3=i^7=i^{11}=\ldots=i^{99}$$
$$i^4=i^8=i^{12}=\ldots=i^{100}$$

יוצא כי במכפלה הנתונה $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$ שווה ל-(-1) מכפלתם של כל ארבעה איברים סמוכים וישנן בדיוק 25 רביעיות כאלה. לכן

$$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}=\underbrace{(i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4)\cdot(i^5\cdot i^6\cdot i^7\cdot i^8)\cdot\ldots\cdot(i^{97}\cdot i^{98}\cdot i^{99}\cdot i^{100})}_{25\cdot4}=$$
$$\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{25}=(-1)^{25}=-1$$

5.

א. $-3i$	ז. $15i$	יב. 5	יז. $-\frac{1}{3}i$
ב. $-7+4i$	ח. -15	יג. $\frac{1}{5}$	יח. $3i$
ג. $6i$	ט. 10	יד. $3i$	יט. $-ai$
ד. i	י. $-3a$	טו. $\frac{a}{b}$	כ. $-\frac{1}{a}i$
ה. $(a-b)i$	יא. $5i$	טז. $\frac{a}{2}$	כא. $-\frac{a}{b}i$
ו. $15i$			

פתרון סעיף ד:

דרך א' – הוצאת i כגורם משותף: $ai+(1-a)i=[a+(1-a)]i=i$

דרך ב' – פתיחת הסוגריים : $ai+(1-a)i=ai+i-ai=i$

פתרון סעיף ט: $-2i\cdot5i=-10i^2=-10\cdot(-1)=10$

פתרון סעיף יח: $\frac{3}{-i}=\frac{3i}{-i^2}=\frac{3i}{-(-1)}=\frac{3i}{1}=3i$

פתרון סעיף כא: $\frac{a}{bi}=\frac{ai}{bi^2}=\frac{ai}{b(-1)}=\frac{ai}{-b}=-\frac{a}{b}i$

6.

א. $x=\pm 5i$

ב. $x=\pm 4i$

ג. $x_1=-2+i\ ,\ x_2=-2-i$

ד. $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ה. $x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\ ,\ x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

ו. $x_1=0\ ,\ x_2=-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ x_3=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ז. $x_1=1\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=i\ ,\ x_4=-i$

ח. $x_1=0\ ,\ x_2=i\ ,\ x_3=-i$

ט. $x_1=1\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=2i\ ,\ x_4=-2i$

י. $x_1=\sqrt{2}\,i,\ x_2=-\sqrt{2}i\ ,\ x_3=\frac{1}{2}i\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}i$

פתרון סעיף ה:

$$2x^2-6x+5=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6+\sqrt{36-40}}{4}=\frac{6+\sqrt{-16}}{4}=\frac{6+\sqrt{4i^2}}{4}=\frac{6\pm 2i}{4}=\frac{6}{4}\pm\frac{2i}{4}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}i$$

פתרון סעיף ט:

$$x^4+3x^2-4=0\Rightarrow\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3+\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}\Rightarrow\left(x^2\right)_1=1\ ,\ \left(x^2\right)_2=-4$$

$$x^2=1\Rightarrow x=1\ ,\ x=-1$$

$$x^2=-4\Rightarrow x^2=4i^2\Rightarrow x=2i\ ,\ x=-2i$$

7.

א. $5-4i$

ב. 4

ג. $-2+3i$

ד. $-6i$

ה. $3+2i$

ו. $3i$

ז. $-6+10i$

ח. $-5i$

ט. $2+2i$

י. $-1-2i$

יא. $-i$

יב. $3-i$

יג. $5-14i$

יד. $-9-8i$

טו. 10

טז. 13

יז. 3

יח. $\pm 2i$

יט. $5\pm 12i$

כ. $6\pm 8i$

כא. 49

כב. -4

כג. $-7-24i$

כד. $1+i$

כה. $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

כו. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i$

כז. 0

כח. $1-i$

פתרון סעיף יז: $\left(1+\sqrt{2}\cdot i\right)\left(1+\sqrt{2}\cdot i\right)=1^2-\left(\sqrt{2}\cdot i\right)^2=1-\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot i^2=1-2\cdot(-1)=3$

פתרון סעיף כ:

$$\left(\sqrt{8}\pm\sqrt{2}\cdot i\right)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2\pm 2\cdot\left(\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot i\right)+\left(\sqrt{2}\cdot i\right)^2=8\pm 2\cdot\sqrt{16}\cdot i+\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot i^2=$$
$$8\pm 8i+2(-1)=6\pm 8i$$

פתרון סעיף כב:

$$(1+i)^4=\left((1+i)^2\right)^2=\left(1^2+2\cdot 1\cdot i+i^2\right)^2=\left(1+2i-1\right)^2=\left(2i\right)^2=2^2i^2=4\cdot(-1)=-4$$

פתרון סעיף כז:

$$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1^2+\cancel{2i}+i^2+1^2-\cancel{2i}+i^2}{1^2-i^2}=\frac{1-1+1-1}{1-(-1)}=\frac{0}{2}=0$$

8. א. $x=2\ ,\ y=-1$

ב. $x=2\ ,\ y=0$

ג. אין פתרון

ד. $x=-4\ ,\ y=3$

ה. $x=0.3\ ,\ y=-0.1$

ו. $x=0.3\ ,\ y=1.1$

ז. $x=-1\ ,\ y=-2$ או $x=1\ ,\ y=2$

ח. $x=2\ ,\ y=-3$ או $x=-2\ ,\ y=3$

פתרון סעיף ו:

דרך א'

$$x+iy=\frac{2+3i}{3-i}=\frac{2+3i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+2i+9i+3i^2}{9-i^2}=\frac{3+11i}{10}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i=0.3+1.1i\Rightarrow$$
$$x=0.3\ ,\ y=1.1$$

דרך ב'

$$x+iy=\frac{2+3i}{3-i}\xrightarrow{\cdot(3-i)}(x+iy)(3-i)=2+3i\Rightarrow 3x-ix+3iy-i^2y=2+3i\Rightarrow$$
$$(3x+y)+(3y-x)i=2+3i\Rightarrow\begin{cases}3x+y=2\\-x+3y=3\end{cases}\Rightarrow x=0.3\ ,\ y=1.1$$

פתרון סעיף ח:

$$(x+iy)^2=-5-12i\Rightarrow x^2+2xyi+i^2y^2=-5-12i\Rightarrow(x^2-y^2)+(2xy)i=-5-12i\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-5\\2xy=-12\end{cases}\xrightarrow{y=-\frac{6}{x}}x^2-\left(-\frac{6}{x}\right)^2=-5\Rightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=-5\Rightarrow x^4+5x^2-36=0\Rightarrow$$
$$\cancel{x^2=-9}\ ,\ x^2=4\Rightarrow x_{1,2}=\pm2\Rightarrow y_{1,2}=\mp3\Rightarrow x_1=2\ ,\ y_1=-3\ ;\ x_2=-2\ ,\ y_2=3$$

הערה: פתרונות המשוואה $x^2=-9$ נפסלו מאחר שלפי הנתון x הוא מספר ממשי.

9. א. $a=-b$

ב. $a=\pm b$

ג. $a=\pm b$

ד. $b=1$, a כל מספר ממשי או $a=0$, b כל מספר ממשי

ה. $a=b=0$

פתרון סעיף ג: לפי כלל השוויון של שני מספרים מרוכבים:

$$\begin{cases}a^2=b^2\\-b=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm b\\a=-b\end{cases}\Rightarrow a=-b$$

פתרון סעיף ד: לפי כלל השוויון של שני מספרים מרוכבים:

אפשרות אחת: $\begin{cases}a^2=a^2\\ab=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in\mathbb{R}\\a\in\mathbb{R},b=1\end{cases}\Rightarrow a\in\mathbb{R},b=1$

אפשרות שנייה: $\begin{cases}a^2=a^2\\ab=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in\mathbb{R}\\a=0,b\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow a=0,b\in\mathbb{R}$

10. א. $5-2i$
ב. $3+i$
ג. $-i$
ד. 7
ה. $a+bi$
ו. $(a+3)-(a-3)i$

11. א. $z_1=1\ ,\ z_2=0\ ,\ z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ב. $z_1=1\ ,\ z_2=0\ ,\ z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

פתרון סעיף א: נציג בצורה האלגברית $x+yi$ את המספר המרוכב z :

$$\overline{(x+yi)}=(x+yi)^2 \Rightarrow x-yi=x^2+2xyi+y^2i^2 \Rightarrow x-yi=\left(x^2-y^2\right)+(2xy)i \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=x \\ 2xy=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=x \\ 2xy+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=x \\ y(2x+1)=0 \end{cases}$$

מן המשוואה התחתונה של המערכת האחרונה מתקבלות שתי אפשרויות: $y=0\ ,\ x=-\frac{1}{2}$. נציב אותן אחת-אחת במשוואה העליונה של המערכת:

$$y=0 \Rightarrow x^2-0^2=x \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x=0\ ,\ x=1 \Rightarrow z_1=0+0i=0\ ,\ z_2=1+0i=1$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

12. א. $2\frac{1}{2}$
ב. $2\frac{1}{2}i$
ג. $-2\frac{1}{2}i$
ד. $3-i$
ה. $1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
ו. $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$
ז. $3+2i$
ח. $2+4i$
ט. $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$
י. $-\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}i$
יא. $1+i$
יב. $\frac{a-1}{2}-\left(\frac{a+1}{2}\right)i$
יג. $\frac{2a-1}{a^2+1}-\left(\frac{a+2}{a^2+1}\right)i$
יד. $\frac{1-a}{2}+\left(\frac{a+1}{2}\right)i$
טו. $\frac{6-a}{a^2+9}+\left(\frac{2a+3}{a^2+9}\right)i$
טז. $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$
יז. $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$
יח. $\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$
יט. $-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$

פתרון סעיף ט:

$$\frac{1+i}{1-3i}=\frac{1+i}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{1+3i+i+3i^2}{1^2-(3i)^2}=\frac{1+4i+3(-1)}{1-(-9)}=\frac{-2+4i}{10}=\frac{-2}{10}+\frac{4}{10}i=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

פתרון סעיף יג:

$$\frac{2-i}{a+i}=\frac{2-i}{a+i}\cdot\frac{a-i}{a-i}=\frac{2a-2i-ai+i^2}{a^2-i^2}=\frac{2a-2i-ai+(-1)}{a^2-(-1)}=\frac{(2a-1)-(a+2)i}{a^2+1}=$$
$$\frac{2a-1}{a^2+1}-\frac{a+2}{a^2+1}i$$

13. א. 4 ג. 4 ה. 1

ב. $-2+3i$ ד. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ ו. 5

פתרון סעיף ו: $\overline{z\cdot\bar{z}}=\overline{(2-i)(2+i)}=\overline{4-i^2}=\overline{4-(-1)}=\bar{5}=5$

14. א. $-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$ ב. $-\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}i$ ג. $\pm(2-i)$ ד. $\pm(2+3i)$

פתרון סעיף ג:

$$\sqrt{3-4i}=x+yi\xrightarrow{(\ )^2}3-4i=x^2+2xyi+y^2i^2\Rightarrow 3-4i=x^2+2xyi-y^2$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=3\xrightarrow{x=-\frac{2}{y}}\\ 2xy=-4\Rightarrow x=-\frac{2}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{y^2}-y^2=3\Rightarrow y^4+3y^2-4=0\Rightarrow (y^2+4)(y^2-1)=0\\ x=-\frac{2}{y}\end{cases}$$

$y^2=-4\Rightarrow\varnothing$

$y^2=1\Rightarrow y=\pm1$

$$\left.\begin{aligned}y=1\Rightarrow x=-2\Rightarrow\sqrt{3-4i}=-2+i\\ y=-1\Rightarrow x=2\Rightarrow\sqrt{3-4i}=2-i\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$$

15. א. $a-bi$ ה. $\frac{-a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$ ט. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

ב. $-a-bi$ ו. $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$ י. $2a$

ג. a^2+b^2 ז. $-b+ai$ יא. bi

ד. $(a^2-b^2)+2abi$ ח. $b-ai$

פתרון סעיף ז:

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a-bi}=\frac{1}{a-bi}\cdot\frac{a+bi}{a+bi}=\frac{a+bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{a+bi}{a^2-b^2(-1)}=\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

16. הוכחות

פתרון סעיף ד: מחד גיסא:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

ומאידך:

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{a_1 + b_1 i} \cdot \overline{a_2 + b_2 i} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 bi) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

לכן לפי כלל המעבר: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

פתרון סעיף ז: מחד גיסא:

$$\overline{z^2} = \overline{(a+bi)^2} = \overline{(a^2 - b^2) + 2abi} = (a^2 - b^2) - 2abi$$

ומאידך:

$$\left(\overline{z}\right)^2 = (a - bi)^2 = (a^2 - b^2) - 2abi$$

לכן לפי כלל המעבר: $\overline{z}^2 = \left(\overline{z}\right)^2$

17. הוכחות

פתרון סעיף ג:

$$i \cdot z = i(a+bi) = ai + bi^2 = -b + ai$$
$$-i \cdot \overline{z} = -i(a - bi) = -ai + bi^2 = -b - ai$$

18. הוכחות

פתרון סעיף ה:

נסמן: $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$:

$$\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = \frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a+bi)^2 + (a-bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2 + \cancel{2a \cdot bi} + (bi)^2 + a^2 - \cancel{2a \cdot bi} + (bi)^2}{a^2 - (bi)^2} =$$
$$\frac{a^2 + b^2 i^2 + a^2 + b^2 i^2}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a^2 + b^2(-1) + a^2 + b^2(-1)}{a^2 - b^2(-1)} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2} + 0 \cdot i$$

כפי שאפשר לראות החלק המדומה של התוצאה התאפס ועל כן התקבל מספר ממשי.

19. הוכחות

פתרון סעיף ה:

נסמן: $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$:

$$z^3 \cdot \overline{z} - z \cdot \overline{z}^3 = z \cdot \overline{z}(z^2 - \overline{z}^2) = (a+bi)(a-bi)\left((a+bi)^2 - (a-bi)^2\right) =$$
$$\left(a^2 - (bi)^2\right)\left(a^2 + 2a \cdot bi + (bi)^2 - a^2 + 2a \cdot bi - (bi)^2\right) =$$
$$\left(a^2 - b^2 i^2\right)\left(4abi\right) = \left(a^2 - b^2(-1)\right)\left(4abi\right) = (a^2 + b^2)2abi = 0 + 4ab(a^2 + b^2) \cdot i$$

כפי שאפשר לראות החלק הממשי של התוצאה התאפס ועל כן התקבל מספר מדומה.

20. א. $z_1=1+2i\ ,\ z_2=-1-2i$ ד. $z_1=-i\ ,\ z_2=-3i$ ו. $z_1=1\ ,\ z_2=i$

ב. $z_1=5-4i\ ,\ z_2=-5+4i$ ה. $z_1=2-i\ ,\ z_2=-1+i$ ז. $z_1=1+i\ ,\ z_2=-3-2i$

ג. $z_1=-2i\ ,\ z_2=-3i$

פתרון סעיף ה:

$$z^2-z-1+3i=0\Rightarrow$$

$$z_{1,2}=\frac{1+\sqrt{1-4\left(-1+3i\right)}}{2}=\frac{1+\sqrt{5-12i}}{2}$$

$$\sqrt{5-12i}=x+yi\xrightarrow{(\ )^2}5-12i=x^2+2xyi+y^2i^2\Rightarrow 5-12i=x^2+2xyi-y^2$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=5\xrightarrow{x=-\frac{6}{y}}\\ 2xy=-12\Rightarrow x=-\dfrac{6}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{36}{y^2}-y^2=5\Rightarrow y^4+5y^2-36=0\Rightarrow (y^2+9)(y^2-4)=0\\ x=-\dfrac{6}{y}\end{cases}$$

$$y^2=-9\Rightarrow\varnothing$$

$$y^2=4\Rightarrow y=\pm2$$

$$y=2\Rightarrow x=-3\Rightarrow z_1=\frac{1+(-3+2i)}{2}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$$

$$y=-2\Rightarrow x=3\Rightarrow z_2=\frac{1+(3-2i)}{2}=\frac{4-2i}{2}=2-i$$

פתרון סעיף ו:

$$\left(1-i\right)z^2-2z+1+i=0\Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{2+\sqrt{4-4\left(1-i\right)\left(1+i\right)}}{2(1-i)}=\frac{2+\sqrt{4-4(1-i^2)}}{2(1-i)}=\frac{2+\sqrt{4-8}}{2(1-i)}=\frac{2+\sqrt{-4}}{2(1-i)}=\frac{2+\sqrt{4i^2}}{2(1-i)}=$$

$$\frac{2\pm2i}{2(1-i)}=\frac{2(1\pm i)}{2(1-i)}=\frac{1\pm i}{1-i}\Rightarrow z_1=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i\ ,\ z_2=\frac{1-i}{1-i}=1$$

21. א. $z=1+2i$ ו. $z=3+2i$

ב. $z=\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}i$ ז. $z_1=4-3i\ ,\ z_2=1-3i$

ג. $z_1=1+2i\ ,\ z_2=4+2i$ ח. $z_1=-2+\sqrt{15}\ ,\ z_2=-2-\sqrt{15}\ ,\ z_3=2-i\ ,\ z_4=2+i$

ד. $z_1=1\ ,\ z_2=-1-2i\ ,\ z_3=-1+2i$ ט. $z_1=-1+bi\ ,\ z_2=1$ (b כל מספר)

ה. $z_1=1\ ,\ z_2=0\ ,\ z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ z_4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

פתרון סעיף ב:

$$i\cdot\bar{z}=3z-4i\Rightarrow i\left(a-bi\right)=3(a+bi)-4i\Rightarrow ai-bi^2=3a+3bi-4i\Rightarrow b+ai=3a+i\left(3a-4\right)$$

$$\begin{cases}b=3a\\ a=3b-4\xrightarrow{b=3a}a=3\cdot 3a-4\Rightarrow 8a=4\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}\Rightarrow\end{cases}$$

$$z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

פתרון סעיף ג:

$$z\cdot\bar{z}-10i=5\cdot\bar{z}\Rightarrow\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)-10i=5\cdot\left(a-bi\right)\Rightarrow(a^2+b^2)-10i=5a-5bi\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=5a\xrightarrow{b=2}a^2+4=5a\Rightarrow a^2-5a+4=0\Rightarrow\left(a-1\right)\left(a-4\right)=0\Rightarrow a=1\ ,\ 4\\ -10=-5b\Rightarrow b=2\end{cases}$$

$$z_1=1+2i\ ,\ z_2=4+2i$$

פתרון סעיף ה:

$$\bar{z}^2-z=0\Rightarrow\left(a-bi\right)^2-\left(a+bi\right)=0\Rightarrow a^2-2abi-b^2-a-bi=0\Rightarrow$$

$$(a^2-b^2-a)-(2ab-b)i=0+0i\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a^2-b^2-a=0\\ -2ab-b=0\Rightarrow -b\left(2a+1\right)=0\Rightarrow b=0\ ,\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$a^2-b^2-a=0\xrightarrow{b=0}a^2-a=0\Rightarrow a\left(a-1\right)=0\Rightarrow a=0\ ,\ a=1\Rightarrow$$

$$z_1=0+0i=0\ ,\ z_2=1+0i=1$$

$$a^2-b^2-a=0\xrightarrow{a=-\frac{1}{2}}\frac{1}{4}-b^2+\frac{1}{2}=0\Rightarrow b^2=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

22. א. $w=2-i\ ,\ z=5+4i$
ב. $w=5-i\ ,\ z=4i$
ג. $w=4-3i\ ,\ z=1+2i$
ד. $w=1-3i\ ,\ z=-1+3i$
ה. $w=1+4i\ ,\ z=-5-2i$

פתרון סעיף ב:

$$\begin{cases}3iz+4iw=-8+20i\ /\cdot 2\\ 2z-3w=-15+11i\ /\cdot 3i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6iz+8iw=-16+40i\\ 6iz-9iw=-45i-33\end{cases}\Rightarrow -\begin{cases}6iz+8iw=-16+40i\\ 6iz-9iw=-33-45i\end{cases}$$

$$\Rightarrow 17iw=17+85i\xrightarrow{:17i}w=\frac{1}{i}+5\Rightarrow w=-i+5\Rightarrow\boxed{w=5-i}\Rightarrow$$

$$2z-3w=-15+11i\xrightarrow{w=5-i}2z-3(5-i)=-15+11i\Rightarrow 2z-15+3i=-15+11i\Rightarrow\boxed{z=4i}$$

פתרון סעיף ה:

$$\begin{cases}2i\left(iz+2w\right)+w=-5+12i\\ 2z-3iw=2-7i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2i^2z+4iw+w=-5+12i\\ 2z-3iw=2-7i\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-2z+4iw+w=-5+12i\\ 2z-3iw=2-7i\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$+\begin{cases}-2z+\left(1+4i\right)w=-5+12i\\ 2z-3iw=2-7i\end{cases}$$

$$\left(1+4i-3i\right)w=-3+5i$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1+i\right)w=-3+5i\Rightarrow w=\frac{-3+5i}{1+i}=\frac{-3+5i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-3+3i+5i+5}{2}=\frac{2+8i}{2}\Rightarrow\boxed{w=1+4i}$$

$$2z-3iw=2-7i\xrightarrow{w=1+4i}2z-3i(1+4i)=2-7i\Rightarrow 2z-3i-12i^2=2-7i\Rightarrow$$

$$2z-3i+12=2-7i\Rightarrow 2z=-10-4i\Rightarrow\boxed{z=-5-2i}$$

.23 א. $m=-4+2i$ ב. $z_2=1+2i$

.24 א. $m_1=i\ ,\ m_2=2+i\ ,\ m_3=-2+i$ ב. $z_{m=i}=-i\ ,\ z_{m=2+i}=1-i\ ,\ z_{m=-2+i}=-1-i$

פתרון סעיף א:

1. $a=0$

$$a=1+mi=0\Rightarrow mi=-1\Rightarrow m=\frac{-1}{i}=-\frac{1}{i}\Rightarrow m=-(-i)\Rightarrow m_1=i$$

2. $\Delta=0\Rightarrow$

$$\Delta=4\left(m+i\right)^2-16\left(1+mi\right)=4m^2+8mi+4i^2-16-16mi=4m^2+8mi-4-16-16mi=$$

$$4m^2-8mi-20=0\Rightarrow$$

$$m^2-2im-5=0\Rightarrow m_{2,3}=\frac{2i\pm\sqrt{-4+20}}{2}=\frac{2i\pm 4}{2}=i\pm 2\Rightarrow m_2=2+i\ ,\ m_3=-2+i$$

פתרון סעיף ב:

1. $(1+mi)z^2-2(m+i)z+4=0\xrightarrow{m_1=i}(1+i^2)z^2-2(i+i)z+4=0\Rightarrow -4iz+4=0\Rightarrow$

$$4iz=4\Rightarrow z=\frac{4}{4i}=\frac{1}{i}=-i$$

2. $(1+mi)z^2-2(m+i)z+4=0\xrightarrow{m_2=2+i}(1+(2+i)i)z^2-2((2+i)+i)z+4=0\Rightarrow$

$$(1+2i+i^2)z^2-2(2+2i)z+4=0\Rightarrow 2iz^2-4(1+i)z+4=0\xrightarrow{:2}$$

$$iz^2-2(1+i)z+2=0\Rightarrow z=\frac{2(1+i)+\sqrt{0}}{2i}=\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i+i^2}{i^2}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

3. $(1+mi)z^2-2(m+i)z+4=0 \xrightarrow{m_3=-2+i} (1+(-2+i)i)z^2-2((-2+i)+i)z+4=0 \Rightarrow$

$(1-2i+i^2)z^2-2(-2+2i)z+4=0 \Rightarrow -2iz^2-4(-1+i)z+4=0 \xrightarrow{:(-2)}$

$iz^2+2(-1+i)z-2=0 \Rightarrow z=\dfrac{-2(-1+i)+\sqrt{0}}{2i}=\dfrac{-2(-1+i)}{2i}=\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{1-i}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=$

$\dfrac{i-i^2}{i^2}=\dfrac{i-(-1)}{-1}=\dfrac{i+1}{-1}=-1-i$

25. א. $m_1=i\ ,\ m_2=\frac{1}{3}i$ ב. $z_{m=i}=i\ ,\ z_{m=\frac{1}{3}i}=1\frac{1}{2}i$

26. א. $m_1=1-i\ ,\ m_2=2i$ ב. $z_{m=1-i}=i\ ,\ z_{m=2i}=-1-i$

27. $d=2-3i$

פתרון: נציב את הנתונים $a_1=-5+4i\ ,\ S_{10}=40-95i$ בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית :

$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] \Rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}\left[2(-5+4i)+(10-1)d\right] \Rightarrow 40-95i=5(-10+8i+9d) \Rightarrow$

$40-95i=-50+40i+45d \Rightarrow 45d=90-135i \Rightarrow d=2-3i$

28. א. $S_{20}=210+420i$ ב. 100 איברים

פתרון:

א. נחשב את ההפרש של הסדרה החשבונית הנתונה

$d=a_2-a_1=(2+4i)-(1+2i)=1+2i$

וניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית :

$a_1=1+2i\ ,\ d=2+4i-(1+2i)=1+2i$

$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] \Rightarrow S_{20}=\frac{20}{2}\cdot\left[2\cdot(1+2i)+19(1+2i)\right]=10(21+42i)=210+420i$

ב. נציב את הנתונים $S_n=5050+10100i\ ,\ d=a_1=1+2i$ בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] \Rightarrow 5050+10100i=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot(1+2i)+(n-1)(1+2i)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow 5050\cancel{(1+2i)}=\frac{n}{2}(2+n-1)\cancel{(1+2i)} \xrightarrow{:(1+2i)} 10100=n^2+n \Rightarrow n^2+n-10100=0 \Rightarrow$

$n=100\ ,\ -101$

מכיוון ש- n הוא מספר טבעי התשובה היא שיש לחבר 100 איברים.

29. א. $q=1+i$ ב. $a_7=-8-16i$ ג. $S_8=-15-30i$

פתרון:

א. נחשב את המנה של הסדרה ההנדסית הנתונה:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

ב. ניעזר בנוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית :

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\Rightarrow a_7=(2-i)\cdot(1+i)^6=(2-i)\left((1+i)^2\right)^3=(2-i)\left(1+2i+i^2\right)^3=$$

$$(2-i)(2i)^3=(2-i)(-8i)=-16i+8i^2=-8-16i$$

ג. ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית :

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\Rightarrow S_8=\frac{(2-i)\left((1+i)^8-1\right)}{(1+i)-1}=\frac{(2-i)\left(\left((1+i)^2\right)^4-1\right)}{i}=\frac{(2-i)\left((1+2i+i^2)^4-1\right)}{i}=$$

$$=\frac{(2-i)\left((2i)^4-1\right)}{i}=\frac{(2-i)\left(16i^4-1\right)}{i}=\frac{(2-i)15}{i}=\frac{30-15i}{i}=\frac{30-15i}{i}\cdot\frac{i}{i}=$$

$$\frac{(30-15i)i}{i^2}=\frac{30i-15i^2}{-1}=-15-30i$$

30. א. $q=1+i$ ב. הוכחה

פתרון:

א. נחשב את המנה של הסדרה ההנדסית הנתונה:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1-i}{-i}=\frac{1-i}{-i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i-i^2}{-i^2}=\frac{i-(-1)}{-(-1)}=1+i$$

ב. ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית :

$$S_{4n}=\frac{a_1(q^{4n}-1)}{q-1}\Rightarrow S_{4n}=\frac{(-i)\left((1+i)^{4n}-1\right)}{(1+i)-1}=\frac{-\cancel{i}\left(\left((1+i)^2\right)^{2n}-1\right)}{\cancel{i}}=-\left((1+2i+i^2)^{2n}-1\right)=$$

$$=-\left((1+2i-1)^{2n}-1\right)=-\left((2i)^{2n}-1\right)=-(2i)^{2n}+1=-\left((2i)^2\right)^n+1=-(4i^2)^n+1=$$

$$-(-4)^n+1$$

החלק המדומה של התוצאה התאפס עבור כל n טבעי ועל כן הסכום S_{4n} הוא מספר ממשי.