

פעולות אלגבריות במספרים מרוכבים בהצגתם האלגברית

הערה: תרגילים אשר יש להם פתרון מלא יסומנו ב- ∇ .

1. חשב את השורשים הבאים תוך שימוש ביחידה המדומה i :

א. $\sqrt{-9}$ ∇

ד. $\sqrt{-0.01}$

ב. $\sqrt{-\frac{1}{4}}$

ה. $\sqrt{-5}$

ג. $-\sqrt{-16}$

ו. $\sqrt{-a^2}$

ז. $\sqrt{-1-a^2}$

ח. $\sqrt{-a^2+4a-4}$ ∇

2. רשום בעמודה המתאימה את הרכיב הממשי $Re(z)$ ואת הרכיב המדומה $Im(z)$ של המספרים המרוכבים הבאים:

Im(z)	Re(z)	z	
		1-2i	א.
		$-\sqrt{3}-i$	ב.
		5i	ג.
		-3	ד.
		a+1-bi	ה.
		a-b+i	ו.
		1-abi	ז.
		(a+1)+(2b-1)i	ח.
		a-1	ט.
		(1-a)i	י.

3. תוצאות חישוב אפשריות של i^n (n הוא מספר שלם) הן כידוע 1, -1, i ו- $-i$ בלבד.

סמן בטבלה הבאה את התשובה הרלוונטית לחזקות של i שמופיעות בה:

-i	i	-1	1	i ⁿ	
				i ¹²	א.
				i ⁴²	ב.
				i ³⁷	ג.
				i ¹²⁰	ד.
				i ⁹⁹	ה.
				i ⁶¹	ו.
				∇ i ⁵⁰	ז.
				i ⁷¹	ח.
				i ⁻³	ט.
				i ⁻⁵ ∇	י.
				i ⁴ⁿ⁺²	יא.
				∇ i ⁴ⁿ⁻¹	יב.

4. חשב את הביטויים הבאים (במידת הצורך היעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית/הנדסית):

$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100} = \nabla$	ה.	$(i^8 - i^{12})^{30} =$	א.
$i \cdot (-i^2) \cdot i^3 \cdot (-i^4) \cdot \dots \cdot (-i^{100}) =$	ו.	$(i^8 + i^9 + i^{10})^{57} =$	ב.
$i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot \dots \cdot i^{101} =$	ז.	$(i + i^2 + i^3 + \dots + i^{61})^{19} = \nabla$	ג.
$(1 - i^2 + i^4 - i^6 + \dots - i^{18})^4 =$	ח.	$(i + i^3 + i^5 + \dots + i^{17})^{15} =$	ד.

5. פשט את הביטויים הבאים:

$\frac{3}{-i} = \nabla$	יח.	$\frac{10i}{2i} =$	יב.	$4i - 7i =$	א.
$\frac{a}{i} =$	יט.	$\frac{2i}{10i} =$	יג.	$4i - 7 =$	ב.
$\frac{1}{ai} =$	כ.	$\frac{6i}{4i} \cdot 2i =$	יד.	$3i - 7i + 10i =$	ג.
$\frac{a}{bi} = \nabla$	כא.	$\frac{ai}{bi} =$	יט.	$ai + (1-a)i = \nabla$	ד.
		$\frac{a^2i}{2ai} =$	יז.	$ai - bi =$	ה.
		$\frac{1}{3i} =$	יז.	$3 \cdot 5i =$	ו.
				$5i \cdot 3 =$	ז.
				$3i \cdot 5i =$	ח.
				$-2i \cdot 5i = \nabla$	ט.
				$ai \cdot 3i =$	י.
				$\frac{10i}{2} =$	יא.

6. פתור את המשוואות הבאות:

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \nabla$	ט.	$2x^2 - 6x + 5 = 0 \nabla$	ה.	$x^2 = -25$	א.
$4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$	י.	$x^3 + 7x^2 + 13x = 0$	ו.	$x^2 + 16 = 0$	ב.
		$x^4 - 1 = 0$	ז.	$x^2 + 4x + 5 = 0$	ג.
		$x^4 + x^2 = 0$	ח.	$-x^2 + x - 1 = 0$	ד.

7. חשב את הביטויים הבאים (הקפד לרשום את התוצאה הסופית בצורה $a + bi$):

א. $(3+i) + (2-5i)$	יב. $(2+i)(1-i)$	כא. $(2-\sqrt{3}i)^2 (2+\sqrt{3}i)^2$
ב. $(2+3i) + (2-3i)$	יג. $(-4+i)(-2+3i)$	כב. $(1+i)^4 \nabla$
ג. $(4+i) - (6-2i)$	יד. $(5-2i)(-2+i)i$	כג. $(2-i)^4$
ד. $(4-3i) - (4+3i)$	טו. $(3+i)(3-i)$	כד. $1 - \frac{1-i}{1+i}$
ה. $(7-2i) - (4-i) + 3i$	טז. $(2-3i)(2+3i)$	כה. $\frac{1}{1-i} - 2$
ו. $(-5+2i) - (3-i) + 8$	יז. $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) \nabla$	כו. $\frac{i}{2-i} + \frac{1}{2+i}$
ז. $2(-3+5i)$	יח. $(1+i)^2$	כז. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} \nabla$
ח. $2 - (2+5i)$	יט. $(3+2i)^2$	כח. $\frac{1-i}{1+i} + \frac{2i}{(1+i)^2}$
ט. $2i(1-i)$	כ. $(\sqrt{8} \pm \sqrt{2}i)^2 \nabla$	
י. $-i(2-i)$		
יא. $1-i(1-i)$		

8. מצא את x ו- y במשוואות הבאות (כאשר x ו- y מספרים ממשיים):

א. $3x + yi = 6 - i$	ה. $\frac{1}{3+i} = x + yi$
ב. $3x + y + 2i = 6 - 2i(y-1)$	ו. $\frac{2+3i}{3-i} = x + yi \nabla$
ג. $y - 1 + 5i = x(6 - 2x)i$	ז. $(x + yi)^2 = -3 + 4i$
ד. $(5 - 7i)(x + yi) = 1 + 43i$	ח. $(x + yi)^2 = -5 - 12i \nabla$

9. נתון כי a ו- b הם מספרים ממשיים. עבור אילו ערכי a ו- b מתקיימות המשוואות הבאות:

א. $a + bi = -b - ai$	ד. $a^2 + abi = a^2 + ai \nabla$
ב. $a^2 + b^2i = b^2 + a^2i$	ה. $(a-b) + (a+b)i = (a+b) - (a-b)i$
ג. $a^2 - bi = b^2 + ai \nabla$	

10. מצא את המספר הצמוד למספרים הבאים:

א. $5 + 2i$	ג. i	ה. $a - bi$
ב. $3 - i$	ד. 7	ו. $(a+3) + (a-3)i$

¹ אמנם $3i + 2 = 2 + 3i$ כשם ש- $3x + 2 = 2 + 3x$, אבל התחביר התקני של מספרים מרוכבים מחייב לרשום אותם כך שהרכיב הממשי מופיע משמאל והרכיב המדומה מימין, דהיינו בצורה $2 + 3i$ ולא בצורה $3i + 2$. נא להקפיד על כך!

11. פתור את המשוואות הבאות (הקפד לרשום את התוצאה הסופית בצורה $a + bi$):
 א. $\bar{z} = z^2$ ב. $\bar{z}^2 = z$

12. חלק את הביטויים הבאים (הקפד לרשום את התוצאה הסופית בצורה $a + bi$):

א.	$\frac{5i}{2i} =$	י.	$\frac{1}{3-i} =$	יא.	$1 - \frac{1-i}{1+i} =$
ב.	$\frac{5i}{2} =$	יז.	$-\frac{13}{(2+3i)i} =$	יב.	$\frac{a-i}{1+i} =$
ג.	$\frac{5}{2i} =$	יח.	$\frac{10}{1-2i} =$	יג.	$\nabla \frac{2-i}{a+i} =$
ד.	$\frac{6-2i}{2} =$	יט.	$\frac{1+i}{1-3i} = \nabla$	יד.	$\frac{1+ai}{1-i} =$
ה.	$\frac{1+3i}{2i} =$	י.	$\frac{2+3i}{1-i} =$	יטו.	$\frac{2+i}{3-ai} =$

יז. חשב את $\frac{1}{z}$ (הופכי של z) כאשר $z = 2 + 3i$.

יח. חשב את $-\frac{1}{z}$ (הופכי לנגדי של z) כאשר $z = -1 + 3i$.

יט. חשב את $\frac{1}{\bar{z}}$ (הופכי לצמוד של z) כאשר $z = 3 - i$.

יטו. חשב את $\frac{z}{\bar{z}}$ כאשר $z = 3 + 4i$.

13. נתון כי $z = 2 - i$. חשב את הביטויים הבאים:

א.	$z + \bar{z} =$	ג.	$z \cdot \bar{z} - 1 =$	ה.	$\frac{z+i}{\bar{z}-i} =$
ב.	$\bar{z} - 2z =$	ד.	$\frac{z}{\bar{z}} =$	ו.	$\overline{z \cdot \bar{z}} = \nabla$

14. בתרגילים הבאים רשום את התוצאה בצורה $x + yi$ והיעזר בכלל השוויון:

א. חשב את המספר z כאשר $z = \frac{1-i}{2+3i}$.

ב. חשב את המספר z כאשר $z = \frac{2+3i}{1-i}$.

ג. חשב את המספר z כאשר $z = \sqrt{3-4i}$ ∇

ד. חשב את המספר z כאשר $z = \sqrt{-5+12i}$.

15. נתון: $z = a + bi$. הצג את המספרים הבאים בעזרת a ו- b :

א.	\bar{z}	ד.	z^2	י.	$\frac{1}{\bar{z}}$
ב.	$-z$	ה.	$-\frac{1}{z}$	יז.	∇iz
ג.	$z \cdot \bar{z}$				

ז + ז̄ .'
 ז - ז̄ .יא
 2

ז / i .ח
 ז̄ / ז .ט

16. הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\overline{(\bar{z})} = z$
 ב. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
 ג. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
 ד. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ∇
 ה. $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

ו. $\overline{\left(\frac{i}{z}\right)} = -\frac{i}{\bar{z}}$
 ז. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.י

ו. $\overline{(i \cdot z)} = -i \cdot \bar{z}$
 ז. $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$ ∇
 ח. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

17. הראה שהמספרים הבאים צמודים:

א. $(\bar{z})^2, z^2$
 ב. $\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}$
 ג. $-i \cdot \bar{z}, i \cdot z$ ∇

18. הראה שתוצאות התרגילים הבאים הינם מספרים ממשיים טהורים:

א. $z + \bar{z}$
 ב. $z \cdot \bar{z}$
 ג. $z^2 + \bar{z}^2$
 ד. $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$
 ה. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ ∇

19. הראה שתוצאות התרגילים הבאים הם מספרים מדומים טהורים:

א. $z - \bar{z}$
 ב. $\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$
 ג. $(z - \bar{z})^3$
 ד. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$
 ה. $z^3 \cdot \bar{z} - \bar{z}^3 \cdot z$ ∇

משוואות עם מקדמים מרוכבים

20. פתור בעזרת נוסחת הפתרונות של משוואה ריבועית ע"י ההצבה $z = a + bi$ ושימוש בכלל השוויון:

א. $z^2 = -3 + 4i$
 ב. $z^2 = 9 - 40i$
 ג. $z^2 + 5iz - 6 = 0$
 ד. $z^2 + 4iz - 3 = 0$
 ה. $z^2 - z - 1 + 3i = 0$ ∇
 ו. $(1-i)z^2 - 2z + 1 + i = 0$
 ז. $z^2 + (2+i)z - 1 - 5i = 0$

21. פתור ע"י בידוד הנעלם באחד מאגפי המשוואה או ע"י הצבת $z = a + bi$ ושימוש בכלל השוויון:

א. $z - 3 = 2 + 2iz$
 ב. $i \cdot \bar{z} = 3z - 4i$ ∇
 ג. $z \cdot \bar{z} - 10i = 5 \cdot \bar{z}$ ∇
 ד. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$
 ה. $\bar{z}^2 - z = 0$ ∇
 ו. $i \cdot \bar{z} = 11 + 9i - 3z$
 ז. $z \cdot \bar{z} = 5(z + 1 + 3i)$
 ח. $z^2 = 11 - 4 \cdot \bar{z}$
 ט. $z + z \cdot \bar{z} = 2 + \bar{z} - z^2$

22. פתור את מערכות המשוואות הבאות (z ו- w הם משתנים מרוכבים):

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} (1+4i)z - 2iw = -17 + 5i \\ 2z - (4-i)w = 1+19i \end{array} \right. & \text{ד.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2z - 3iw = 7 + 2i \\ iz + 2w = 3i \end{array} \right. & \text{א.} \\ \nabla \left\{ \begin{array}{l} 2i(iz + 2w) + w = -5 + 12i \\ 2z - 3iw = 2 - 7i \end{array} \right. & \text{ה.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3iz + 4iw = -8 + 20i \\ 2z - 3w = -15 + 11i \end{array} \right. & \nabla \text{ ב.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3iz + 5w = 14 - 12i \\ iz - (1-2i)w = 12i \end{array} \right. & \text{ג.} \end{array}$$

חקירת משוואות עם פרמטר

23. אחד מפתרונות המשוואה $z^2 + mz + 11 + 2i = 0$ הוא $3 - 4i$.
 א. מצא את הפרמטר m .
 ב. מצא את הפתרון השני של המשוואה.

24. נתונה המשוואה $(1+mi)z^2 - 2(m+i)z + 4 = 0$.
 א. מצא לאלו ערכי m יש למשוואה פתרון יחיד. ∇
 ב. מצא את הפתרון היחיד בכל אחד מהמקרים שמצאת בסעיף א'. ∇

25. נתונה המשוואה $(m^2+1)z^2 - 2(m+i)z - 2 = 0$.
 א. מצא לאלו ערכי m יש למשוואה פתרון יחיד.
 ב. מצא את הפתרון היחיד בכל אחד מהמקרים שמצאת בסעיף א'.

26. נתונה המשוואה $(1+i)z^2 + 2mz + m - 2 = 0$.
 א. מצא לאלו ערכי m יש למשוואה פתרון יחיד.
 ב. מצא את הפתרון היחיד בכל אחד מהמקרים שמצאת בסעיף א'.

תרגילים בשילוב סדרה חשבונית

27. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא $4i - 5$ וסכום עשרת האיברים הראשונים הוא $40 - 95i$.
 מצא את הפרש הסדרה. ∇

28. א. מצא את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $1+2i, 2+4i, \dots$. ∇
 ב. כמה איברים יש לחבר בסדרה כדי שסכומם יהיה $5050 + 10100i$? ∇

תרגילים בשילוב סדרה הנדסית

29. בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא $2 - i$, האיבר השני הוא $3 + i$.
 א. חשב את מנת הסדרה. ∇
 ב. חשב את האיבר השביעי שלה. ∇
 ג. חשב את סכום שמונת האיברים הראשונים שלה. ∇

30. בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא $-i$, האיבר השני הוא $1-i$.

א. חשב את מנת הסדרה. ∇

ב. הוכח כי S_{4n} הוא מספר ממשי לכל n טבעי. ∇